2010-05-25

Réunion IUFM

Didactique des mathématiques

Le défi, le jeu, la situation problème sont aussi efficaces que l’enseignement programmatique. La situation problème est aussi un dispositif très pertinent pour la différenciation.

* + Travailler les imbrications de concepts et les situations de référence.
  + Susciter un questionnement sur l’activité mathématiques : qu’est-ce que / à quoi sert la mathématique. On enseigne des techniques sans enseigner les situations de référence permettant de structurer les enseignements.
  + Rapport entre les mathématiques et le réel  à évoquer.
  + Importance des affichages évolutifs et de référence.

**Des manipulations en mathématiques**

Si l’on peut répondre à une question par la manipulation, on peut affirmer qu’il n’y a pas de situation mathématiques (ex. : C1 : partager un ensemble de cubes en deux paquets de même quantité ; il suffit de repérer le nombre 3).La mathématique commence quand il y a opération intellectuelle sur le réel. Le matériel pourra être utilisé pour valider la solution construite

On peut faire de vraies activités mathématiques dès le C1, mais on n’a pas de trace de l’activité intellectuelle des élèves.

L’introduction précoce de signes mathématiques peut entraver la pensée mathématique.

Avant d’introduire les signes, il faut que l’on ait travaillé le sens.

Ainsi, l’apprentissage de la comptine n’aide pas à la compréhension du nombre ; on peut apprendre à compter en restant « à côté » du concept de nombre. (Ex. devant une collection de 15 bouteilles qu’ils savent « quantifier », des élèves peuvent ne pas savoir aller prendre la collection de bouchons adéquate.).

Il est important de faire des allers retours entre situations de références et situations dérivées : c’est lorsque l’enfant repère dans les situations dérivées la situation de référence qu’on peut penser qu’il a construit le concept.

Des nombres – du nombre en tant qu’objet / du nombre en tant qu’outil

Le nombre doit être abordé comme objet ; il faut faire que l’enfant parle de réalités en utilisant des nombres identifiés de manière visuelle. « Deux » est un invariant d’une série de collections ayant une propriété de quantité invariante. On commence à 2, puis 3 ; 4 sera ensuite repéré comme 2 et 2, preuve que les nombres sont conceptualisés.

Parallèlement, il faut faire en sorte que le nombre soit utilisé comme outil : construire une collection d’une quantité identique à celle d’une autre qui n’est pas en accès « immédiat ». L’’enfant gère une information mémorisée en se déplaçant jusqu’à la collection cible (ex : compléter une boîte d’œufs par « imitation »). Ce type de situation est fondamental – il faut la faire rencontrer sous divers habillages tout au long du C1-C2.

Dans les premières rencontres avec ces situations, on permet que l’enfant se déplace pour rechercher le matériel autant de fois que nécessaire (il est important que l’enfant saisisse la correspondance un à un des deux collections » ; ensuite, on exigera de compléter la collection cible avec un seul déplacement.

Ce qui sera intéressant dans le comptage après cela, même sur de petites quantités, c’est qu’il sert de moyen de vérification.

La comptine sera intéressante à partir de cette conceptualisation pour investir des quantités plus importantes (capacité à développer en début de C2).

Les mises en commun avec verbalisations peuvent aider à la conceptualisation, mais il faut se méfier des aides que l’on serait tenter d’apporter pour « accélérer ».

Le concept de « collection » doit être travaillé très tôt, indépendamment des quantités. Les fichiers sont peu favorables à la construction de collections, celles-ci étant le plus souvent « déjà-là ».

Les enfants de fin de CP-CE1 ont du mal à élargir le travail sur les quantités quand ils n’ont pas assis cette conceptualisation.

La première des connaissances sur les nombres, c’est le mot « deux » ; les autres codages ne sont pas urgents (chiffre, …).

L’introduction du comptage exige de la vigilance : le comptage des élèves à l’accueil, ne permet peut-être pas le transfert vers le concept de quantité - l’enfant peut penser que « un », c’est « Paul », « 25 » c’est « Anne », … sans considérer que « 25 » est la quantité de la collection. Pour éviter ce travers, en comptant une collection de cubes, on écarte un à un les cubes que l’on compte : la collection constituée par cette mise à l’écart correspond à la quantité « nommée ». Un comptage « statique » n’est pas un exercice pertinent.

Insister systématiquement pour faire « voir » que « deux », c’est « un » et un » ; « trois », c’est « deux » et « un », … En « montrant » sur les doigts ces quantités, on aide à construire l’invariant.

**De l’introduction des opérations**

Au CP, on constate le plus souvent une programmation où l’addition intervient avant la soustraction. Pour faire acquérir le sens, il faut introduire les 2 situations en opposition.

Le double permet d’aborder des situations multiplicatives sans introduire forcément le signe de la multiplication

On identifie 3 archétypes théoriques des situations additives-soustractives que l’on rencontre dans le réel. Cette théorisation permet à l’enseignant de repérer s’il y a un modèle dans lequel l’enfant rencontre plus de difficulté. (Théorie de Vergnaut)

a)Transformations d’état

Etat initial > transformation > état final

Les termes lexicaux de l’énoncé sont un indice fort du type de calcul (perte, …).

Dans ces situations, soit on cherche l’état initial, soit on cherche l’état final (cas les plus simples, pas de mot piège)

b) Compositions d’états

Etat 1 et état 2 inclus dans un super-ensemble

Dans ces situations, on peut recourir à la soustraction, au complémentaire.

c) Comparaisons d’état

Etat 1🡨 écart 🡪 état 2

La boîte noire (ou boîte opaque) est un outil qui permet d’anticiper

Addition : Je mets 5 cubes dans la boîte, j’en ajoute 3, combien de cubes y a-t-il dans la boîte maintenant ? (archétype a)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| \* | \* | \* | \* | \* | \* | \* | \* |  |  |

Une fois la boîte fermée, l’enfant doit trouver un moyen mental de trouver la somme.

PS : cette situation peut être ritualisée. La difficulté est de faire verbaliser ce qu’il a pensé.

En GS, cette situation peut être accompagnée chez l’enfant par une manipulation des doigts qui assurent un relais.

Le codage «5 + 3» n’intervient qu’au CP, quand on peut penser que les élèves ont conceptualisé la situation à partir d’une variété d’exemples.

Soustraction :

1. La boîte contient 5 cubes, j’en enlève 3 (archétype a)
2. Représentation par bande numérique

J’enlève 2, où vais-je me placer ?

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3\* | 4 | 5 |  |  |  |  |  |

Ces 2 situations sont des situations de référence à faire varier et pratiquer de manière régulière.

Leur maîtrise va développer des compétences transférables à d’autres situations.

L’enfant utilise les situations de référence comme des modèles mathématiques (un pbm de places dans un bus peut être rapproché de la situation de complétion de la boîte à œufs).

Codage : il peut être intéressant de commencer par le résultat et d’écrire l’opération ensuite en l’accompagnant de la verbalisation à laquelle prépare l’utilisation des boîtes noires (j’ajoute, j’enlève, …).

Il faut concevoir l’apprentissage des opérations selon 4 dimensions.

Pour chaque opération identifiée comme un concept, on a 4 dimensions à appréhender simultanément et systématiquement.

1. Fréquentation de situations de référence
2. Apprentissage de moyens pour déterminer le résultat (comptage, sur-comptage, décomptage …), et pour finir des moyens de calcul plus élaborés – techniques de calcul.
3. Dimension du langage ; à chaque niveau d’apprentissage correspond un niveau discursif. En GS, le langage de l’énoncé est proche du langage d’action (j’ajoute, j’enlève, …)
4. Propriétés mathématiques de l’opération

A chaque étape, les 4 dimensions doivent intervenir de manière équilibrée. Si l’une des dimensions est inappropriée, on fait apparaître un obstacle.

En conséquence, on ne travaille pas les techniques de calcul pour elle-même, mais à partir d’une situation évoquée par un niveau discursif adapté ; les propriétés en découleront et viendront enrichir les techniques de calcul (ex. ajouter 1, c’est passer au suivant, …). Les 4 étapes sont liées et progressent simultanément dans un souci de cohérence programmatique (laquelle ouvre un champ de recherche action).

L’enjeu en résolution de problème est d’abord un enjeu de compétence à verbaliser-expliciter la procédure qu’on utilise.

Les écritures symboliques (équations) viennent coder un raisonnement (ex. boîte noire : j’ajoute 5 et la boîte contient 12 : deux équations (5 + x = 12  qui correspond à la situation ; et 12 – 5 = x qui correspond à la situation de vérification / raisonnement inverse).

Les référents : quel affichage ? On visera une schématisation avec les élèves. On aura intérêt à proposer des équivalences non visuelles (comptine, …) pour permettre une appropriation par d’autres canaux perceptifs.

**Des problèmes**

Proposer des problèmes ouverts dès le CP (type Ermel) : ex : 3 enfants gagnent 28 billes. Cherche des solutions (possibilités) pour trouver le nombre de billes gagnées par chacun ?

Il est important que ces recherches aboutissent à des codages mathématiques pour structurer et aboutir à une activité mathématique (écriture des opérations)

**De la mise en forme**

La phase de recherche ne doit pas brider les élèves en posant des exigences d’orthographe – présentation qui entraineraient une surcharge cognitive au détriment de la focalisation dans la recherche mathématique.En sciences comme en mathématiques, on a l’avantage de travailler sur une vérité qui ne tient que pour ne pas encore être contredite. On peut aussi appliquer cette attitude à l’orthographe.

**De la technique opératoire de la multiplication**

Rappel : les 4 dimensions de l’enseignement appliquées à la soustraction

Concept (soustraction)

4 connaître des « propriétés » de la soustraction

3 disposer d’un langage approprié pour conduire l’opération

« enlever » - « moins »

2 Connaître une Technique Opératoire pour déterminer le résultat s’une soustraction

1 Référent

Reconnaître la soustraction comme opération donnant la solution de problèmes

Quelle technique opératoire pour donner du sens ?

Casser la « dizaine » des nombres supérieurs

45 – 27 / je casse 4 dizaines – j’écris 3 et je prends 10 qui ajoutés à 5 font 15 ; la retenue 1placée devant 5 permet de lire 15)

305 – 158 / / j’écris 29 (dizaines) etc. …

Intérêt : double statut des chiffres des dizaines qui représentent aussi un multiple de 10 unités.

YG : pour être valable, il faut que toute opération mathématique soit réversible (ex : aller des dizaines aux unités et vice versa)

Une situation d’introduction de la soustraction avec retenue

« N a 45 euros et en dépense 27 ». Cette situation peut être identifiée comme situation de référence pour la soustraction avec retenue.

Pour la résolution, passage par la manipulation des valeurs monétaires (4 billets de 10 et un billet de 5 euros / change d’un billet de 10 en 10 pièces de 1 euro).

La même situation peut être « pratiquée »  avec des cubes mathématiques (degré d’abstraction plus élevé).

Ces situations sont propices à la construction du sens de la technique opératoire ; il faut les poursuivre

**De la technique opératoire de la division**

Quelle technique opératoire (TO) pour donner du sens ?

2375 : 8

La TO « habituelle » ne met pas au contact du nombre 2375 : on commence par diviser 23 par 8

Situation de référence

2331 euros à partager à 4 (les valeurs ont été choisies pour que les divisions partielles par 4 soient impossibles).

On part d’une représentation monétaire (23 billets de 100, 3 billets de 10, 1 pièce de 1)

Les élèves cherchent à partager les 23 billets en 4, puis les 3 billets de 100 restants sont changés en billets de 10. Le quotient est écrit en préparant le nombre avec C (pour billets de 100 ou centaines) / D (pour billets de 10 ou dizaine, …)

Parti pris : les soustractions sont posées « hors » de la division pour ne pas surcharger, pour ne pas compliquer surtout dans le cas où les élèves maîtrisent mal la TO de la soustraction.

NB : pour les valeurs > 1000, on pourra évoquer d’autres systèmes monétaires où la valeur faciale 1000 existe (ou des monnaies fantaisistes).

L’institutionnalisation de la TO est indispensable pour l’extraire de la situation (défaut présent chez ERMEL).

Le résultat de l’opération est posé sous forme euclidienne dans laquelle on explicite le sens des différentes quantités en présence

2331 = (4 x 582) + 3

où 3 est ce qui reste, 4 le nombre de personnes, 582 la part distribuée à chacun, 2331 la valeur à partager.

**Situation de recherche**

14 jetons à répartir dans 3 gobelets dans lesquels il y a déjà des jetons (5, 3, 2 jetons)

5+ a = 3+ b = 2+ c

A=B+C = 14

Phase 1 : équilibre dans les 3 gobelets : + 0, + 2 ; + 3 (on utilise 5 jetons, il en reste 9)

Phase 2 : On répartit les 9 jetons restants (+3 ; + 3 ; +3)

Phase 3 : totalisation des jetons placés :A= 0 + 3 =3  ; B = 3 + 2 =5 ; C = 3 + 3 = 6

Pour quelle classe ? Avec quels objectifs ?

- En GS avec manipulation

- En CP par des tâtonnements mathématiques (essayer + n dans le gobelet a, déduire ce que l’on ajoute en b et c pour équilibrer ; comparaison au reste, …)

**De la géométrie**

Importance de la représentation mentale (ex : pour la représentation de l’angle droit en maternelle : aller chercher des pailles pour construire des figures –carré, rectangle ; possible aussi pour les triangles – rectangle, isocèle, équilatéral , mais aussi quelconque !…)

Représentation à main levée d’une figure (angle droit par ex.) : donne une idée de la représentation de l’enfant ; montre l’utilité du tracé instrumenté et de la validation instrumentée.

Toute reproduction de figure est un problème d’investigation et de recherche.

Importance de l’utilisation du papier pointé (carré ou triangulé) pour travailler les représentations spatiales, notamment des quadrilatères particuliers (permet une transition entre papier quadrillé et papier blanc).

Supports : réaliser des constructions sur des feuilles non orthogonales, bords irréguliers.

Matériel : le papier calque plié comme gabarit d’angle droit : la transparence permet de créer un instrument de vérification de l’angle droit plus efficace que l’équerre (à réserver plutôt au tracé de l’angle droit).