DIDACTIQUE DE LA GÉOMÉTRIE

Étymologiquement, le mot « géométrie » se décompose en « géo » et « métrie » qui signifient respectivement « terre » (gaïa) et « mesure » (metron).

Après quelques repères historiques qui permettront de montrer les choix de l'institution scolaire quant à l'enseignement de la géométrie dans l'enseignement primaire et secondaire français, certains aspects de l'activité géométrique qui ont fait l'objet de recherches en didactique des mathématiques seront abordés : le rapport entre l'espace physique et l'espace géométrique ; l'utilisation de la figure ; la démonstration ; les mesures de longueur, d'aire et de volumes, et l'utilisation de transformations géométriques.

A. Histoire et enseignement de la géométrie

La géométrie pose de nombreux problèmes d'apprentissage et d'enseignement. Afin d'aborder les questions qui ont été travaillées en didactique des mathématiques à ce sujet, il est utile de posséder quelques éléments épistémologiques sur la géométrie et de connaître les choix de l'institution scolaire quant à son enseignement.

I. Repères historiques

Ce paragraphe brosse les étapes du développement de la géométrie, l'accent a été mis sur l'évolution de la pensée géométrique davantage que sur la progression des savoirs.

1. Naissance de la géométrie

Les premiers travaux de géométrie ont été menés il y a plus de 3 000 ans à Babylone et en Égypte pour résoudre des problèmes concrets de mesure : à Babylone pour résoudre des problèmes d'astronomie, et en Égypte pour retrouver les limites de terrains qui avaient été recouverts par les eaux pendant les crues du Nil. Les mathématiciens de cette époque avaient établi des formules pour déterminer l'aire de polygones élémentaires (triangle, trapèze, parallélogramme…) et le volume de polyèdres (pavé, prisme droit...) Ils disposaient aussi de formules approximatives concernant le cercle. Par exemple, d'après le papyrus de Rhind, les Égyptiens considéraient que l'aire d'un disque de diamètre d était équivalente à l'aire qu'un carré de côté 8d/9. Des listes de mesure de côtés de triangles rectangles montrent aussi qu'ils connaissaient le théorème de Pythagore.

Jusqu'au VIe siècle avant J.-C., la géométrie est utilitaire, elle n'est pas théorisée : il n'y a donc pas de démonstration.

2. La géométrie grecque et ses développements

À partir du VIe siècle avant J.-C., les Grecs fondent une géométrie qui n'est plus seulement pratique, mais aussi philosophique et scientifique. Citons notamment les écoles de Thalès (VIe siècle avant J.-C.) et de Pythagore (première moitié du VIe siècle avant J.-C.). Dans ces écoles, la géométrie devient un objet de réflexion pour elle-même, elle devient aussi déductive en fondant les propriétés des figures par des démonstrations.

C'est avec Platon (Ve siècle avant J.-C.) que les géomètres commencent à distinguer les objets du monde réel et les objets géométriques qui sont abstraits et parfaits. Ainsi la figure géométrique apparaît comme le dessin idéal qu'il est impossible d'obtenir sur le sable ou ailleurs.

Au IIIe siècle avant J.-C., Euclide organise les savoirs géométriques de manière logique à partir de définitions, d'axiomes et de propriétés démontrées. Ses *Éléments* constituent sans doute le plus célèbre ouvrage de l'histoire des mathématiques qui rassemblent tous les savoirs mathématiques de son époque, ils comportent 13 livres portant des thèmes différents : la géométrie plane, la théorie des nombres, la géométrie des solides.

Le mot axiome est ici à prendre au sens de « vérité indémontrable mais évidente pour quiconque en comprend le sens, principe premier, et considérée comme universelle. » (Dictionnaire Le Robert). Citons par exemple, en langage actuel :

- étant donnés deux points distincts, il existe une droite unique passant par ces deux points ;
- pour tout point A et tout point B distinct de A, il existe un cercle unique de centre A passant par B ;
- parallèlement à une droite donnée et par un point donné, il passe une droite et une seule.

Remarquons que l'évidence des axiomes vient de la référence au monde réel, à l'espace physique.

Du IXe au XIIIe siècle, les mathématiciens arabes traduisent des ouvrages grecs, les commentent et les enrichissent notamment de la trigonométrie. Ils développent des méthodes de calcul d'aire et de volume et la géométrie de la sphère pour les besoins de l'astronomie. Le monde occidental de l'époque ignore tout de ces travaux et les redécouvre pendant la Renaissance. À cette époque, parce que le dessin et la peinture se veulent réalistes, se développent la géométrie projective et la perspective.

3. Avec la géométrie analytique, la géométrie devient algébrique

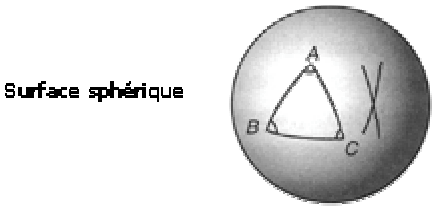
Par l'introduction des repères, les points sont caractérisés par leurs coordonnées et les ensembles de points, comme les droites et certaines courbes, se caractérisent par des équations. Les questions géométriques peuvent alors se traduire algébriquement ce qui facilite parfois les démonstrations. C'est à Descartes (1596-1650) qu'on doit l'introduction des repères et Lagrange (1736-1813) est le premier à utiliser les équations de droites et de plans. Monge (1746 - 1818) invente la notion de vecteurs.

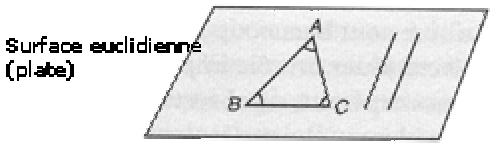
4. Les géométries non euclidiennes

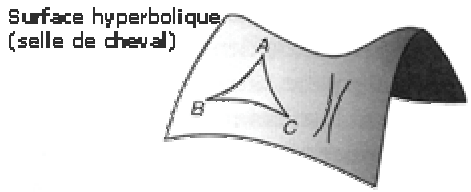
Au XVIIe siècle les mathématiciens commencent à questionner la théorie géométrique : la question qui se pose est de savoir si l'on peut ou non démontrer que, par un point extérieur à une droite on peut mener une parallèle à cette droite et une seule.

Cette question change le travail des mathématiciens sur la géométrie qui est interrogée en tant que théorie : les axiomes demandés par Euclide sont-ils suffisants, autrement dit n'y a-t-il pas des propriétés qui sont utilisées implicitement dans les raisonnements ? et sont-ils tous nécessaires ? Les axiomes d'Euclide deviennent alors des postulats : le fait qu'on les admette n'est pas lié à une évidence en référence au monde réel, ils ne sont pas tenus pour vrais, mais ils sont considérés comme des fondements d'un système déductif. Après plusieurs tentatives infructueuses pour démontrer l'axiome des parallèles, Gauss (1777-1855) démontre qu'on ne peut pas le démontrer. Cet axiome est donc un postulat nécessaire à la théorie géométrique.

Il en découle que cette propriété est bien admise, qu'elle n'est pas obligatoire, et qu'il est donc théoriquement possible de prendre un postulat contraire. Bien sûr, ce faisant, on ne prétend plus décrire l'espace physique, réel, et la géométrie s'éloigne radicalement de son objectif premier. Cette découverte stimula le travail de mathématiciens qui construisirent des théories géométriques réfutant l'axiome d'Euclide.







Lobatchevski (1792-1856) propose le postulat suivant : « Par un point extérieur à une droite on peut mener une infinité de parallèles à cette droite » ; il développe ainsi une géométrie non-euclidienne appelée « géométrie hyperbolique ». Riemann (1826-1886) introduit un autre postulat : « Par un point extérieur à une droite il ne passe aucune parallèle » ; il construit alors une nouvelle géométrie dite « elliptique ».

Ces géométries sont très théoriques, il est difficile de se les représenter, mais elles ne sont pas inutiles car elles permettent de résoudre des problèmes dans des espaces qui ne sont pas « plats ».

Voyons par exemple ce que deviennent les notions de droite et de triangle : sur une surface sphérique (à courbure positive), les droites sont des grands cercles (elles n'admettent aucune parallèle) la somme des angles d'un triangle est supérieure à 180° ; sur une surface hyperbolique (à courbure négative), la somme des angles d'un triangle est inférieure à 180° et par un point extérieur à une droite, on peut mener une infinité de parallèles !

L'autre question théorique posée sur les axiomes d'Euclide a été résolue par Hilbert (1862-1943) qui a montré que l'œuvre d'Euclide comportait encore beaucoup d'implicites et de références à l'expérience. Hilbert a aussi construit un système complet de postulats pour la géométrie euclidienne.

II. La géométrie aujourd'hui

Ainsi, actuellement, n'y a-t-il plus une géométrie, mais des géométries. Les mathématiciens ont poursuivi le travail théorique pour comprendre ce qui fait qu'une théorie peut être qualifiée de théorie géométrique. Ils considèrent qu'une géométrie est constituée d'un ensemble et d'un groupe de transformations agissant sur cet ensemble. Ainsi, pour un même ensemble, on peut définir plusieurs groupes de transformations qui chacun définissent une géométrie différente.

Voici quelques exemples :

- en topologie, on définit des déformations qui conservent aux éléments de l'ensemble les notions d'intérieur, d'extérieur, d'ouvert, de fermé, de voisinage, etc ;
- en géométrie projective, on définit des transformations qui déforment les éléments en conservant l'alignement des points ;
- en géométrie affine, on définit des transformations qui déforment les éléments en conservant le parallélisme des droites et les rapports de longueur des segments ;
- en géométrie euclidienne, on définit des similitudes qui agrandissent ou rétrécissent les éléments en conservant les formes, les angles et les rapports de longueur des segments. En particulier, les isométries conservent à la fois les formes et les mesures.

La géométrie aujourd'hui n'est donc plus « naturelle », intimement liée au monde des objets physiques et matériels, elle est « théorique », complètement insérée dans des problématiques de choix de postulats et de recherche des conséquences de ces choix. Dans l'enseignement primaire et secondaire actuel français, la géométrie enseignée n'est pas la géométrie « naturelle », pourtant elle reste en rapport avec l'espace physique réel.

III. Organisation de l'enseignement de la géométrie en France

Les programmes indiquent que la géométrie s'enseigne dès l'école maternelle notamment par la reconnaissance et le classement de formes. À l'école élémentaire les connaissances géométriques s'acquièrent lors de représentations graphiques ou textuelles de formes données et lors de la construction de formes à partir de leur représentation textuelle ou graphique. Dans l'enseignement secondaire, les connaissances sont enrichies par l'étude des objets géométriques fondamentaux (droite, polygone et cercle) dont les propriétés, autant que possible, sont démontrées. Les méthodes de travail géométriques restent, jusqu'au lycée, limitées à l'utilisation des propriétés des configurations élémentaires et des isométries. La géométrie analytique et la géométrie vectorielle fournissent aux lycées des filières scientifiques de nouveaux outils.

1. À l'école maternelle

Les élèves doivent être capables de différencier et de classer des objets en fonction de caractéristiques liées à leur forme, de reconnaître, de classer et de nommer des formes simples (carré, triangle, rond), et de reproduire un assemblage d'objets de formes simples à partir d'un modèle (puzzle, pavage, assemblage de solides).

2. À l'école élémentaire

L'enseignement vise des compétences de repérage sur le plan ou dans l'espace, la connaissance des objets géométriques de base du plan et de l'espace et de leurs propriétés les plus importantes ; les élèves doivent pouvoir contrôler les propriétés géométriques d'une figure à l'aide des instruments. Ils doivent aussi être capables de tracer des figures planes simples ou complexes en utilisant les instruments adaptés, sur papier uni ou quadrillé, à partir d'un modèle, d'une description ou d'un programme de construction. Inversement des compétences sont également visées quant à la production de descriptions de solides de l'espace ou de figures planes en mobilisant un vocabulaire adapté.

3. Au collège

Les objectifs du collège sont d'une part l'enrichissement des savoirs concernant les figures élémentaires et leurs relations ainsi que leur hiérarchisation et leur structuration. Les figures planes sont les droites, les cercles, les triangles, les quadrilatères et quelques polygones réguliers ; les solides de l'espace sont les prismes droits et les cylindres de révolution, les pyramides et les cônes de révolution. Les propriétés hiérarchisées et structurées concernent la géométrie plane, mais pas celle de l'espace ; il s'agit des propriétés d'incidence, des propriétés fondamentales des triangles, des quadrilatères et des cercles, des théorèmes de Thalès et de Pythagore ainsi que des formules trigonométriques permettant ainsi de calculer des mesures de longueur ou d'angle. Quelques connaissances concernant les isométries du plan (symétrie orthogonale et symétrie centrale, translation et rotation) son également visées.

4. Au lycée

L'enseignement de la géométrie au lycée ne propose aucune axiomatisation formelle. Les propriétés géométriques concernant l'espace sont formalisées. Les élèves

sont initiés à la géométrie analytique (dans un repère cartésien ou polaire) ainsi qu'à l'utilisation des vecteurs. Les configurations du plan sont enrichies par les triangles isométriques ou semblables ainsi que par les barycentres. Aux isométries étudiées au collège s'ajoutent les projections, les homothéties et les similitudes.

Les situations proposées à l'étude conduisent à une diversité des méthodes mises en œuvre : propriétés des configurations, calcul vectoriel, calcul barycentrique, transformations, nombres complexes, géométrie analytique.

La progression des apprentissages proposée actuellement par l'institution scolaire part donc de l'expérience directe puis instrumentée avec le monde concret. Avec l'apprentissage de la démonstration, en classe de 4e principalement, l'enseignement propose un travail fondé sur des éléments théoriques comprenant des définitions et des propriétés (admises ou démontrées). Ce travail s'appuie sur des représentations langagières et graphiques. Les éléments théoriques enseignés ne découlent pas d'une axiomatique achevée.

Les études didactiques montrent que l'enseignement de la géométrie n'aboutit pas, finalement, à une mise en relation de l'espace physique avec l'espace géométrique abstrait ; elles concluent à une rupture entre la géométrie d'observation et la géométrie de la démonstration. Certains élèves, bien sûr, parviennent à acquérir les savoirs géométriques visés, mais trop nombreux restent ceux qui échouent dans cet apprentissage.

B. Rapport entre espace physique et espace géométrique

La recherche en didactique des mathématiques a travaillé la question du rapport entre l'espace physique et l'espace géométrique car bien des difficultés d'apprentissage semblent provenir d'une confusion entre les savoirs issus de l'expérience directe avec le monde réel et les savoirs géométriques.

I. De l'espace physique à la géométrie

Avant de résoudre des problèmes issus de l'espace physique, le sujet, pendant son enfance, découvre cet espace, apprend à s'y repérer tout en développement ses capacités motrices et sensorielles. L'enfant découvre différents lieux du monde réel : il se situe par rapport au lieu et aux objets du lieu, et il situe les objets les uns par rapport aux autres. Ces apprentissages spatiaux, sont d'une grande importance pour les apprentissages géométriques, ils sont simplement cités mais ils ne seront pas développés ici.

1. Les relations du sujet à l'espace physique

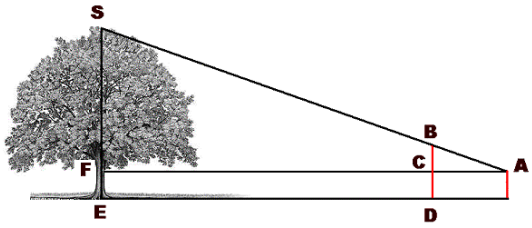
Les moyens qu'un sujet peut mettre en œuvre pour résoudre ou pour contrôler la solution d'un problème relatif à l'espace physique ne sont pas indépendants de la taille du sujet par rapport à celle de l'espace occupé par les objets sur lesquels porte le problème à résoudre : déterminer la hauteur d'un triangle dessiné sur une feuille de papier, la hauteur d'un arbre ou celle d'une montagne. Pour cette raison, Guy Brousseau (1983) considère que la taille de l'espace est une variable didactique dont il distingue trois valeurs :

- le micro espace est l'espace des petits objets que l'on peut déplacer, manipuler. Le sujet est à l'extérieur de cet espace, il en perçoit les objets de façon exhaustive. La feuille de papier sur laquelle travaille l'élève est un micro espace ;
- le méso espace est l'espace des objets dont la taille est comprise entre 0,5 et 50 fois la taille de l'enfant. Ces objets peuvent être vus globalement, pratiquement de façon

simultanée. Le sujet fait partie de cet espace. La classe, la cour de récréation, etc. sont des méso espaces ;

- le macro espace est l'espace des objets dont le sujet ne peut en avoir que des visions partielles, la vision globale est une construction intellectuelle. Le sujet est à l'intérieur de cet espace.

Le théorème de Thalès, par exemple, est intéressant dans le méso espace où les mesures de longueur sont coûteuses voire impossible.



Brousseau souligne que le curriculum (ensemble des contenus enseignés et progression de cet enseignement) est limité au seul micro espace. L'absence de modélisation conduit à l'absence de problématisation des liens entre l'espace physique et l'espace géométrique. Cela contribue à expliquer la rupture entre la géométrie de l'observation et la géométrie de la démonstration.

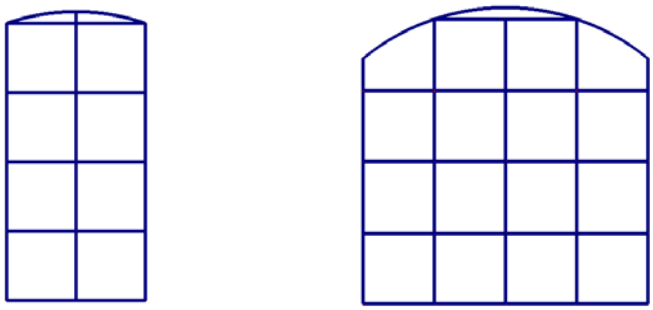
2. Le travail dans l'espace physique est une *géométrie naturelle*

Dans *Paradigmes et espaces de travail géométriques*, Alain Kuzniak (2004) définit la géométrie naturelle pour la confusion qu'elle entretient entre le modèle et la réalité, cette géométrie a la réalité et le monde sensible pour source de validation. Les dessins sur lesquels elle s'appuie sont des schémas qui représentent le réel, son horizon est technologique : il s'agit d'apporter des réponses utiles concrètement à des problèmes concrets.

<u>Exemple de problème</u>

Question n°1

Voici le plan d'une fenêtre dont le haut arrondi est un arc de cercle (figure de gauche).



Le propriétaire de la maison engage un maçon pour élargir la fenêtre, il voudrait conserver l'arc et obtenir une fenêtre comme le montre le plan (figure de droite).

Le maçon arrive avec son apprenti qui lui demande comment il va s'y prendre pour prolonger l'arc de cercle.

Comment répondriez-vous à la place du maçon ?

Question n°2

Les carreaux de la fenêtre sont des carrés de 27 cm de côté. L'apprenti a découpé une plaque de verre, il a mesuré les quatre côtés du quadrilatère obtenu, il obtient bien 27 cm pour chaque côté et annonce a son patron que le morceau de verre convient.

Le patron n'est pas satisfait, il demande à l'apprenti de mesurer une diagonale pour savoir si le morceau découpé est bien un carré. L'apprenti mesure une diagonale, il obtient 382 mm, mais il ne sait pas s'il peut proposer cette découpe à son patron.

Que feriez-vous à la place de l'apprenti ?

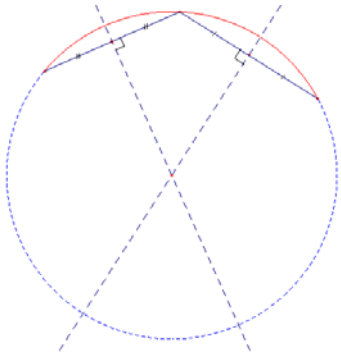
II. Le savoir géométrique distingue l'espace physique et l'espace géométrique

Des procédures pratiques pour prolonger un arc de cercle et répondre ainsi au premier problème du maçon posé ci-dessus sont pertinentes dans ce contexte :

- si l'espace de travail est le plan de la fenêtre, on peut utiliser du papier calque et par superposition partielle, on prolonge l'arc de cercle ;
- si l'espace de travail est le mur, on peut utiliser un carton dans lequel on découpe l'arc de cercle initial et par superposition partielle, on prolonge l'arc de cercle.

1. Géométrie naturelle et géométrie axiomatique

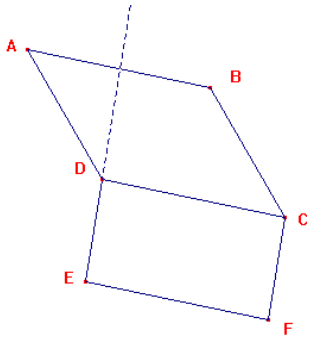
Ces procédures pratiques ne sont pas les procédures géométriques attendues d'un élève à la fin de sa scolarité secondaire. Colette Laborde (1990) dans son article intitulé « L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques » indique que l'enseignement doit permettre à l'élève de distinguer l'espace physique de l'espace géométrique car c'est seulement à partir de cette distinction que l'élève pourra comprendre les questions qui sont posées en géométrie et les réponses qui peuvent être apportées.



Dans la pratique, ce qui compte, c'est que le prolongement de l'arc de cercle soit suffisamment précis pour les besoins auxquels il doit répondre, alors qu'en géométrie c'est la manière de s'y prendre dans une situation abstraite de la réalité qui est importante. Peu importe finalement en géométrie de savoir de quel arc de cercle il s'agit : pour répondre à la question, il suffit de la transformer en la recherche du centre du cercle dont un arc est donné car connaissant le centre et un point quelconque du cercle (tout point de l'arc convient) on sait qu'il n'existe qu'un cercle ayant ce centre et passant par ce point.

Le centre du cercle est obtenu comme étant le point d'intersection des médiatrices de deux cordes choisies non parallèles. La résolution ne s'occupe pas de sa mise en œuvre pratique pour apporter une solution au problème (le point d'intersection est-il sur le mur ou dans le trou creusé pour y placer la fenêtre ? et dans ce dernier cas, comment prolonger le cercle ?). La géométrie ainsi dissociée de la pratique est désignée par géométrie axiomatique (cf. Kuzniak, 2004).

2. Géométrie axiomatique « naturelle » ou « formelle »



Un élève de 5e à qui l'on propose une figure représentant un parallélogramme ABCD et un rectangle CDEF et à qui l'on demande si les deux droites (AB) et (DE) sont perpendiculaires ne doit pas contrôler la perpendicularité demandée avec l'équerre ; il doit utiliser la propriété des parallélogrammes pour établir que (AB) est parallèle à (CD), celle des rectangles pour établir que (DE) est perpendiculaire à (CD) puis utiliser la propriété selon laquelle « si deux droites sont parallèles, toutes perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre ».

Pourtant la notion de perpendicularité n'a jamais été définie dans sa scolarité autrement que par référence aux côtés de l'équerre. En outre l'élève ayant dessiné le parallélogramme et le rectangle, doit aussi pouvoir contrôler sur son dessin que les informations tirées du monde

réel sont conformes à sa réponse : aux approximations de dessin près, si l'angle coïncide avec celui de l'équerre, c'est que les droites sont perpendiculaires, alors que sinon, elles ne le sont pas.

Les savoirs de la géométrie enseignée sont donc théoriques, mais la théorie n'est pas enseignée. Alain Kuzniak (2004) désigne par « géométrie axiomatique naturelle » cette géométrie où la source de la validation des résultats se fonde sur les lois hypothético-déductives dans un système axiomatique qui n'est pas formel car les axiomes comme la syntaxe renvoient à la réalité. Il désigne par « géométrie axiomatique formelle » une géométrie où la source de la validation des résultats se fonde aussi sur les lois hypothético-déductives dans un système axiomatique purement formel.

3. La géométrie naturelle et la géométrie axiomatique en contradiction

Pour savoir si le carreau convient à son patron, l'apprenti utilisera la caractérisation des triangles rectangles par le théorème de Pythagore en comparant la longueur théorique des diagonales d'un carré de côté 27 avec la longueur de la diagonale du carreau qu'il a mesurée. La longueur théorique est : $\sqrt{27^2 + 27^2} = \sqrt{1\,458} \approx 38{,}18$. La valeur mesurée par l'apprenti est 38,2 qui est très proche de la valeur théorique donc le carreau convient. On perçoit ici la différence entre la géométrie naturelle et une géométrie axiomatique : l'élève de collège à qui l'on demande si un losange de côté 27 cm dont une diagonale mesure 38,2 cm est un carré devra répondre par la négative car le nombre 38,2 n'est pas égal au nombre $\sqrt{1\,458}$; l'apprenti lui, bien qu'il mobilise une méthode qui repose sur des savoirs géométriques, travaille avec des mesures prises dans l'espace physique qui sont par nature approximatives.

Remarquons l'opposition entre géométrie naturelle et géométrie axiomatique que l'apprenti aurait pu mesurer les deux diagonales du losange, il aurait trouvé 382 mm pour chacune d'elle et aurait conclu que le carreau est convenable par référence à la propriété selon laquelle un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur est un rectangle ; il aurait donc conclu par référence à des savoirs d'une géométrie axiomatique alors même que dans cette géométrie, un losange de côté 25 mm ne peut pas avoir ses deux diagonales qui mesurent 382 mm. Rappelons encore que dans la recherche du centre du cercle dont l'arc est donné, la méthode géométrique n'est pas facilement utilisable dans la pratique si les médiatrices et le centre du cercle sont dans la zone où le mur est creusé pour insérer la fenêtre.

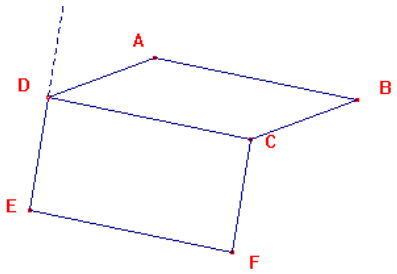
Dans l'activité géométrique, il y a donc une distinction fondamentale entre l'espace physique et l'espace géométrique, ne pas les distinguer empêche cette activité, elle empêche par conséquent la construction des connaissances géométriques.

III. Les représentations graphiques en géométrie

En géométrie naturelle, les représentations graphiques doivent permettre d'effectuer des mesures sur cette représentation, les exigences de précision des tracés sont donc importantes. En géométrie axiomatique, l'activité mathématique nécessite des représentations graphiques qui permettent d'organiser les données du problème de manière synthétique. Par cette organisation et la simultanéité des informations auxquelles elles donnent accès, ces représentations graphiques aident à imaginer des possibilités pour résoudre le problème : elles ont une fonction heuristique (qui aide à la découverte). En outre, comme on le verra plus loin, le travail géométrique conduit souvent à enrichir la représentation de départ par des tracés nouveaux.

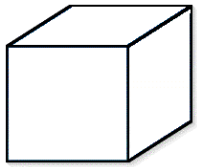
1. Ambiguïté des représentations graphiques en géométrie axiomatique

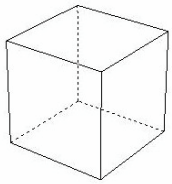
Malgré la distinction précédente entre les deux types de représentations graphiques, comme l'écrit Colette Laborde (1990), le statut des représentations graphiques en géométrie axiomatique reste ambigu pour deux raisons au moins. D'abord la représentation graphique ne comporte pas forcément toutes les données du problème, ensuite elle donne parfois à voir des faits qui ne sont pas des données ou des propriétés qui ne sont pas exactes. Par exemple, la représentation du problème précédent peut conduire à écrire que la droite (ED) coupe le segment [AB] perpendiculairement ce qui n'est pas forcément vrai : si l'angle $\widehat{BCD}$ est obtus, la droite (EF) et le segment [AB] ne se coupent pas.



2. Le « vu » et le « su » d'une représentation graphique

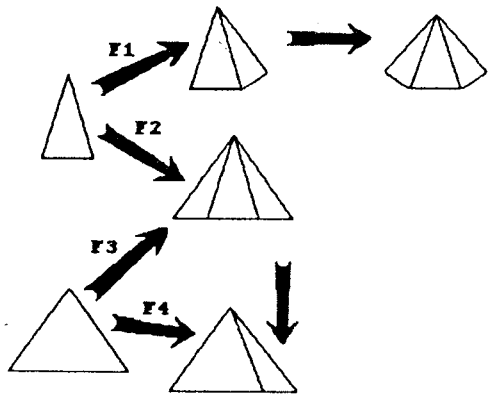
Bernard Parzysz (1988) qui a travaillé spécifiquement sur les représentations graphiques d'objets géométriques de l'espace, conclut à un conflit du dessinateur entre « le vu et le su » c'est-à-dire entre ce qu'il sait de l'objet géométrique et ce qu'il donne à en voir par sa représentation. La représentation ci-contre (en haut) donne-t-elle à voir un carré et deux parallélogrammes ou un cube ? En supposant que ce soit un cube, les parallélogrammes représenteraient donc des carrés. En outre, comme dans la représentation ci-contre (en bas) on dessine parfois les arêtes cachées, c'est-à-dire ce qu'on sait mais qu'on ne voit pas…

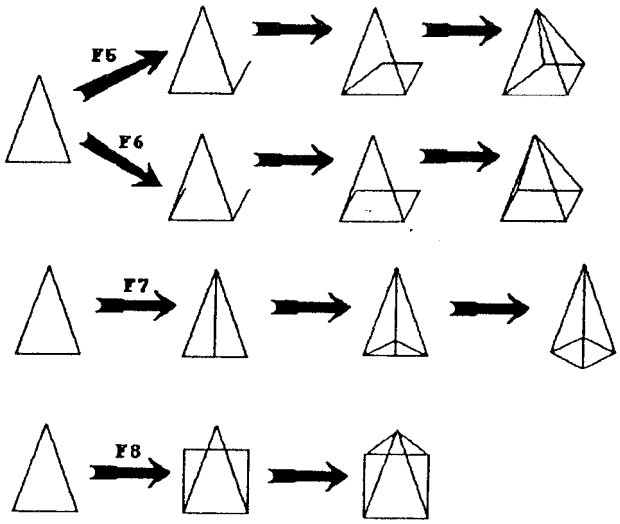




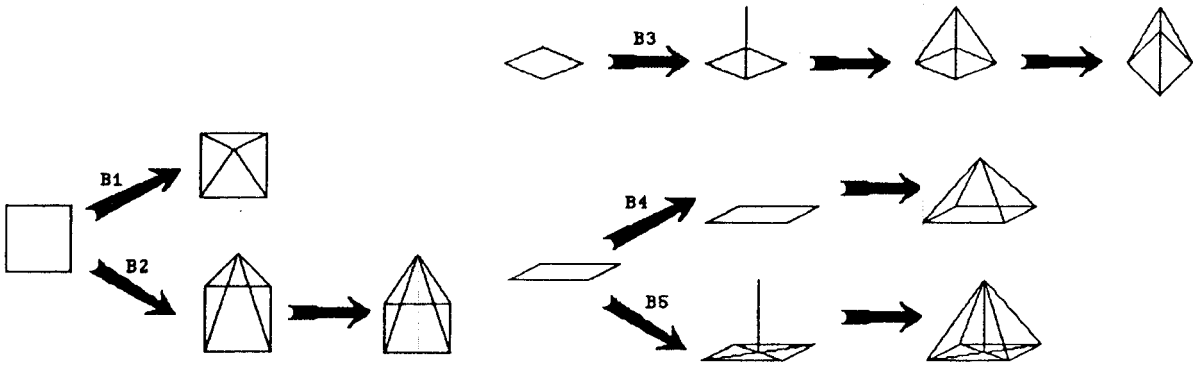
Bernard Parzysz et François Colmez (1993) ont étudié l'évolution de conflit du dessinateur entre le vu et le su. Ils ont proposé pour cela à des élèves des toutes les classes depuis le CE2 jusqu'à la 2nde de représenter sur une feuille de papier uni, la pyramide posée sur le bureau de leur professeur. La pyramide était « squelettique » puisque réalisée à l'aide de pailles, elle était régulière et à base carrée ce qui signifie que toutes les arêtes issues du sommet avaient la même longueur. Les élèves dessinent la pyramide en partant de sa vue d'ensemble, en partant d'une face ou en partant de la base. Les étapes suivantes du dessin résultent de choix différents des dessinateurs qui ont été rendus très clairement par deux schémas reproduits ci-dessous.

En partant de la globalité ou d'une face :





En partant de la base :

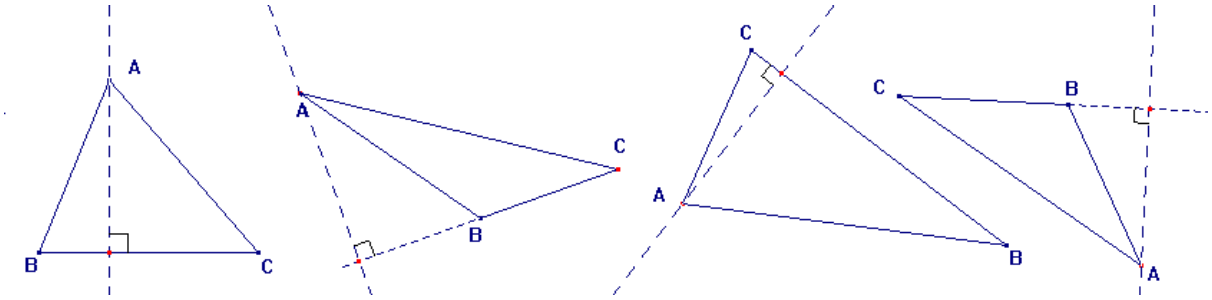


Les représentations obtenues permettent aux auteurs de dégager trois types de productions graphiques :

- des productions où le su est insuffisant car le dessin ne rend pas compte de la tridimensionnalité, elles sont présente au CE2 surtout ;
- des productions qui rendent compte du su de manière compatible avec le vu qui est premier, ces productions sont présentes du CM à la 3e ;
- des productions résultant d'une reconstruction mentale de l'objet, le vu est représenté de manière compatible avec le su qui est premier, elles apparaissent en classe de 3e.

3. Figure, dessin et espace graphique

Dès ses travaux de 1988 qui montrent ces conflits entre le vu et le su, Bernard Parzysz propose de distinguer les dessins des figures parmi les représentations graphiques en géométrie : le dessin est la trace matérielle sur la feuille de papier alors que la figure renvoie à l'objet théorique représenté, autrement dit : le dessin représente une figure ; la figure quant à elle est composée d'objets géométriques en relation. Illustrons cette distinction en considérant la figure composée d'un triangle ABC et la hauteur issue du sommet A ; les dessins suivants représentent cette même figure :



Ainsi la figure appartient à l'espace géométrique, pas le dessin. Pour autant, peut-on affirmer que le dessin appartient à l'espace physique, sensible ? Les difficultés que montrent les travaux de Parzysz quant à la représentation sur une feuille de papier d'un objet tridimensionnel, même de petite taille est un premier argument pour distinguer l'espace du dessin et l'espace physique, même lorsque les objets à représenter sont de petite taille. Il y a un travail non négligeable d'opérations mentales à effectuer pour passer de l'espace physique au dessin, et il y en a un autre lorsqu'il s'agit de passer du dessin à l'espace physique (il suffit de penser pour s'en convaincre à l'activité déployée pour construire un objet, même simple, à partir d'un dessin). Autrement dit, comme le propose Sophie Gobert (2001) dans sa thèse, le micro espace (qui appartient à l'espace physique) ne doit pas être assimilé à celui du dessin

qu'elle propose de nommer l'espace des représentations, puisque cet espace n'est pas non plus l'espace géométrique. L'espace des représentations se trouve ainsi comme un espace intermédiaire entre l'espace physique, sensible, et l'espace géométrique, abstrait.

En conclusion de ce paragraphe consacré au rapport entre l'espace physique et l'espace géométrique, nous reprendrons la distinction entre trois problématiques proposée par Berthelot et Salin (2000) suivant la nature du problème :

- une *problématique pratique* dans laquelle les objets sur lesquels on travaille sont des objets physiques (en particulier des dessins), dans laquelle la démarche de résolution est pratique et dans laquelle la validation se fait en restant dans l'espace sensible. Cette problématique est complètement ancrée dans la géométrie naturelle (au sens de Kuzniak) ;
- une *problématique géométrique* dans laquelle les objets sont théoriques, dans laquelle la démarche de résolution et la validation s'appuient uniquement sur des savoirs géométriques. Cette problématique est complètement ancrée dans une géométrie axiomatique (au sens de Kuzniak) ;
- une *problématique spatio-géométrique (ou de modélisation)* dans laquelle on travaille sur des objets physiques, dans laquelle la démarche de résolution s'appuie sur des objets géométriques qui idéalisent les objets physiques, et sur des savoirs géométriques, mais dans laquelle la validation se fait dans l'espace physique, comme dans la problématique pratique, même si cela n'est pas conforme à la théorie. Cette problématique tient à la fois de la géométrie naturelle dans laquelle s'inscrivent le problème et la solution, et d'une géométrie axiomatique naturelle dans laquelle le problème est modélisé et résolu.

C. Multiplicité des signifiants en géométrie et situations pour l'enseignement

Les situations qui engendrent, chez les élèves, des activités dans l'espace physique, visent l'appropriation de connaissances spatiales ; elles sont proposées à l'école maternelle, et encore à l'école élémentaire, car les connaissances spatiales sont indispensables à l'acquisition de connaissances géométriques. Au lycée, et déjà au collège, les situations d'enseignement visent l'apprentissage de savoirs et de méthodes qui permettront aux élèves de résoudre des problèmes géométriques. À l'école élémentaire et au collège, les activités des élèves ne sont pas toujours inscrites exclusivement dans l'espace physique ou dans l'espace géométrique car l'objectif est précisément la transition entre espace physique et espace géométrique. Cette transition est qualifiée par certains auteurs de passage « d'une géométrie d'observation à une géométrie de déduction » et elle est exprimée dans les programmes de 6e par « passer de l'identification perceptive de figures et de configurations à leur caractérisation par des propriétés ». L'espace des représentations graphiques, espace intermédiaire entre l'espace physique et l'espace géométrique, est alors souvent convoqué.

Colette Laborde (1990) en se référant à de nombreux travaux antérieurs souligne une organisation des interactions entre les savoirs et les apprenants qui consiste à prendre appui sur la multiplicité des systèmes de signifiants utilisés en géométrie (les objets, les dessins et les textes). Elle les distingue des tâches généralement proposées dans l'enseignement qui sont énoncées par un texte et un dessin, mais où le dessin ne fait qu'illustrer l'énoncé discursif.

Nous allons étudier les types de tâches proposées aux élèves pour l'apprentissage de la géométrie et qui portent sur les signifiants, nous indiquerons ce faisant les difficultés que rencontrent les élèves. Ces types de tâches sont principalement : la reproduction d'un objet de l'espace physique ou de l'espace graphique, la représentation graphique ou langagière d'un

objet de l'espace physique ou de l'espace graphique, la construction d'une figure de l'espace géométrique ou la rédaction d'un programme de construction de cette figure.

I. Reproduction d'un objet de l'espace physique ou de l'espace graphique

L'élève doit réaliser une copie à l'identique d'un objet de l'espace physique (figure cartonnée, solide composé de faces en plastique, etc) ou d'un dessin de l'espace graphique, qu'il soit simple (polygone, cercle, etc.) ou complexe (c'est-à-dire qu'il renvoie à plusieurs figures dans une disposition particulière les unes par rapport aux autres). Parfois on demande à l'élève de réaliser un agrandissement ou une réduction de l'original.

1. Généralités

Le travail de copie d'objets de l'espace physique s'effectue sur différents matériaux ou supports et nécessite éventuellement des outils. Les matériaux peuvent être des planches de papier carton, des baguettes, des pailles, etc. ou des matériels prévus à cet effet et commercialisés (« Polydron » par exemple). Les outils sont ceux de la géométrie (règle, équerre, compas rapporteur) ainsi que ciseaux, adhésif, calque, etc. Les objets bidimensionnels (les dessins) peuvent être donnés sur un papier uni, quadrillé ou pointé, et la copie peut être demandée sur un papier analogue ou différent, suivant les connaissances géométriques sous-jacentes visées ou non.

Matériel « Polydron »

Pour la même raison, des outils comme le papier calque, les gabarits d'angles, etc. ou les instruments de dessin comme la règle graduée ou non, le compas, l'équerre et le rapporteur peuvent être autorisés ou ne pas l'être. La validation de la reproduction s'effectue par comparaison avec le modèle, un degré de conformité peut être précisé.

Les objectifs visés par l'enseignant qui donne un travail de reproduction sont que l'élève observe le modèle à reproduire et tire de cette observation des propriétés qui lui seront suffisantes pour réaliser la copie. Ces propriétés du modèle peuvent être à découvrir, ou à appliquer lorsqu'elles ont déjà été étudiées en classe. En outre, la copie peut nécessiter la mise en œuvre de savoirs géométriques, eux-mêmes à découvrir ou à appliquer.

2. Le dodécaèdre en pièces « Polydron » : un exemple de reproduction de solide

Analysons la tâche « réaliser une copie du solide posé sur le bureau à l'aide de pièces Polydron » lorsque le solide est le dodécaèdre présenté ci-dessus. Les élèves doivent avoir été familiarisés avec le matériel et ses techniques d'accrochage. Afin de choisir les pièces à utiliser, ils repèrent d'une part qu'elles ont toutes la même forme et d'autre part qu'il s'agit de pièces à cinq côtés (des pentagones réguliers convexes). Ils remarquent que douze pièces sont nécessaires pour réaliser ce solide ; ses quatre couleurs imposent de choisir trois faces par couleur. L'étude du solide montre que chaque face est liée à cinq autres faces (une par côté) et que si l'on souhaite que deux faces de la même couleur ne soient pas en contact, il faut au moins quatre couleurs pour réaliser le dodécaèdre.

Pendant la construction, les élèves pourront comparer la rigidité des formes intermédiaires qu'ils construisent et constater que le solide proposé ne se laisse pas déformer

par écrasement. Le professeur pourra aussi faire nommer les faces, faire remarquer que les côtés ont la même longueur, faire décrire le solide comme étant un objet fermé, etc.

Le matériel « Polydron » est souvent présent dans les écoles, il permet de construire des objets tridimensionnels ainsi que leurs patrons.

3. La reproduction de dessins du plan

Lorsque le dessin à reproduire est simple, l'élève le recopie élément après élément, de proche en proche. Cela suppose qu'il n'est constitué que de segments de droites et de cercles (éventuellement de demi-cercles ou de quarts de cercles) et que l'élève puisse prendre le gabarit des angles formés par deux segments consécutifs (ou les mesurer). La tâche est rapidement difficile à réaliser dès les angles ne sont pas droits.

Lorsque le dessin est complexe, c'est-à-dire composé de plusieurs figures simples, la tâche de reproduction varie suivant qu'elle nécessite ou non une organisation chronologique, l'introduire de sous-figures ou de sur-figures, ou encore la connaissance de propriétés géométriques qui n'apparaissent pas sur le dessin. Les outils et instruments interdits ou bien mis à disposition des élèves pour réaliser la tâche sont encore un facteur supplémentaire de variation.

<u>Exemples de dessin simple</u>

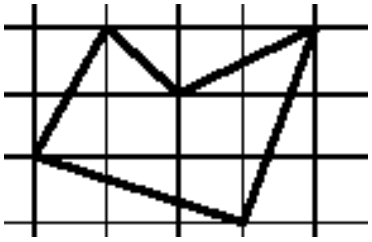
En proposant une activité de reproduction de dessins aussi simples que le rectangle ci-contre, l'enseignant vise l'acquisition de compétences quant à la manipulation des instruments géométriques.

Mesurer un segment nécessite de poser la règle le long du segment, de placer l'origine de la graduation et pas le début de la règle à une des extrémités du segment, et de lire la valeur de la graduation qui correspond à l'autre extrémité du segment.

Remarque : dans le cas du report de longueur, la règle peut être remplacée par une bande de papier, et le fait de placer le début de la règle au lieu de l'origine de la graduation à la première extrémité du segment ne conduit pas à une erreur.

Tracer une ligne droite avec une règle nécessite une utilisation coordonnée des deux mains : un élève droitier doit savoir tenir la règle de la main gauche et, avec sa main droite, faire glisser son crayon le long de la règle, l'élève doit appuyer suffisamment sur le crayon pour que le trait soit marqué et que le crayon ne s'éloigne pas de la règle, mais il ne doit pas appuyer trop fort car sinon il risque de faire glisser la règle tenue par l'autre main. L'utilisation du compas ou de l'équerre nécessite aussi de telles compétences.

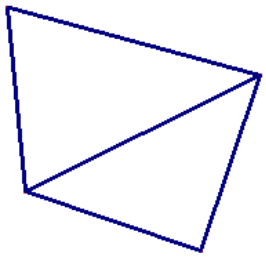
Pour un dessin sur papier quadrillé, la tâche consiste généralement à repérer les positions des points sur les nœuds, il n'y pas d'autres instruments à utiliser que la règle et éventuellement le compas, ni à identifier les propriétés du dessin à reproduire. Ici par exemple, le dessin possède deux côtés perpendiculaires, et un élève pourra très bien reproduire la figure sans même voir cette propriété.



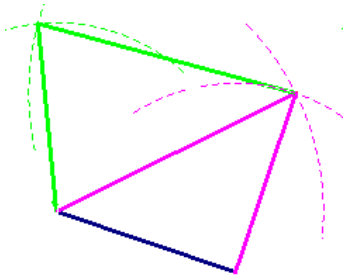
<u>Exemples de dessin complexe</u>

Dans le cas où le dessin donné sur du papier uni fait référence à plusieurs figures géométriques de bases (segments parallèles ou perpendiculaires, triangles, rectangles, arcs de cercle, etc.) et où la copie est à effectuer avec les instruments classiques, l'élève doit repérer ces sous-figures, leurs positions relatives et effectuer les tracés.

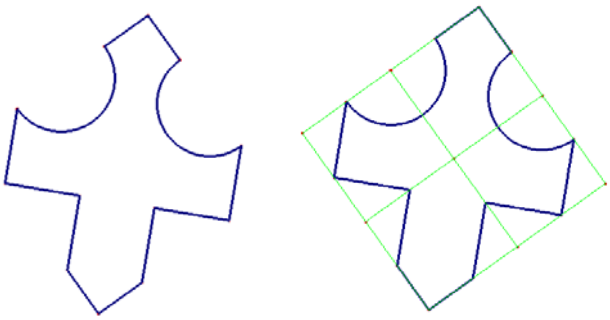
Le dessin ci-contre est composé de deux triangles : le premier (en haut) est isocèle, les deux côtés égaux mesurent 3,5 cm et la base mesure 2,5 cm, l'angle au sommet principal mesure 41° et les angles à la base mesurent 69,5° ; le second triangle (en bas) est isocèle et rectangle, ses côtés perpendiculaires mesurent 2,5 cm, ils forment avec l'hypoténuse des angles de 45° et son hypoténuse est l'un des deux côtés égaux du premier triangle isocèle.



Si tous les instruments sont autorisés, l'élève pourra construire les triangles en utilisant des informations parmi celles qui ont été fournies ci-dessus et qu'il pourra prendre sur le dessin. Si la règle non graduée et le compas seulement sont autorisés, l'élève devra savoir construire un triangle connaissant ses trois côtés : il lui suffira alors de tracer un premier côté avec la règle en utilisant le compas pour en reporter la longueur puis de construire les deux autres sommets avec le compas en traçant les arcs de cercle correspondant. L'élève, ici encore, pourra reproduire le dessin sans tenir compte de propriétés comme les égalités de longueur ou la perpendicularité de deux côtés.



Le dessin proposé ci-contre à gauche est difficile à reproduire. Pour réaliser sa copie, il est utile de rechercher et de tracer des lignes supplémentaires qui ont été utilisées et vraisemblablement effacées pour construire le dessin orignal. En rajoutant ces lignes, un carré apparaît qui se trouvera très utile pour réaliser la copie. Ce carré est une « sur-figure » du dessin orignal.



II. Représentations graphiques ou langagières d'un objet de l'espace physique ou graphique

La représentation d'un objet de l'espace physique est le passage de l'objet à un signifiant de l'objet. Ce signifiant est un graphique dans le cas d'une représentation graphique, ce signifiant est un texte dans le cas d'une représentation langagière, on parle alors de description de l'objet.

1. Représentations graphiques d'un objet de l'espace physique

Le thème des représentations graphiques d'un objet de l'espace physique a déjà été abordé dans le paragraphe consacré aux représentations graphiques en géométrie. Nous avons vu que le passage de l'espace physique à l'espace graphique met en concurrence la volonté du dessinateur de représenter ce qu'il voit, et celle qu'il a de représenter ce qu'il sait. La représentation graphique, quelle qu'elle soit, oblige à abandonner certaines propriétés de l'objet : aucune représentation en perspective d'un cube ne peut montrer que toutes les faces sont des carrés.

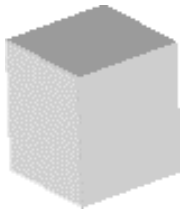
Des procédés conventionnels ont été établis pour représenter les objets de l'espace : les perspectives axonométriques, la perspective à points de fuite ou perspective conique, et le

dessin technique avec ses multiples vues, sont les plus courants. Pour les polyèdres, les développements ou patrons sont aussi utilisés.

Les perspectives axonométriques

Les fuyantes (c'est-à-dire les lignes qui indiquent la profondeur) sont parallèles sur le dessin dès qu'elles représentent des droites qui sont parallèles dans la réalité. On utilise deux types de perspectives axonométriques : la perspective cavalière (les objets sont vus de face) et la perspective isométrique (les objets sont vus par l'arête).

perspective cavalière

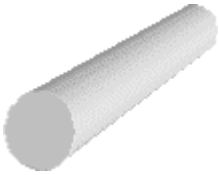


perspective isométrique

La perspective conique

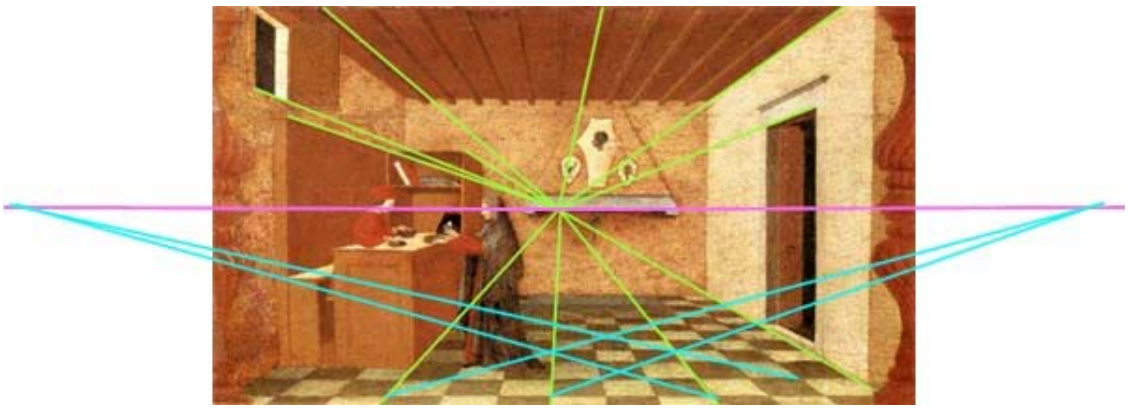
La perspective conique (ou euclidienne, ou à points de fuite) a été connue dans l'Antiquité, la pratique en a été abandonnée, et elle a été « redécouverte » à la Renaissance en Italie. Les fuyantes qui sont parallèles dans la réalité sont représentées par des droites qui se rejoignent en des points appelés « points de fuite » et qui sont alignés sur la « ligne d'horizon ».

Un pavé droit



Un cylindre de révolution

Le miracle de l'hostie, Paolo Uccello (1397-1475)

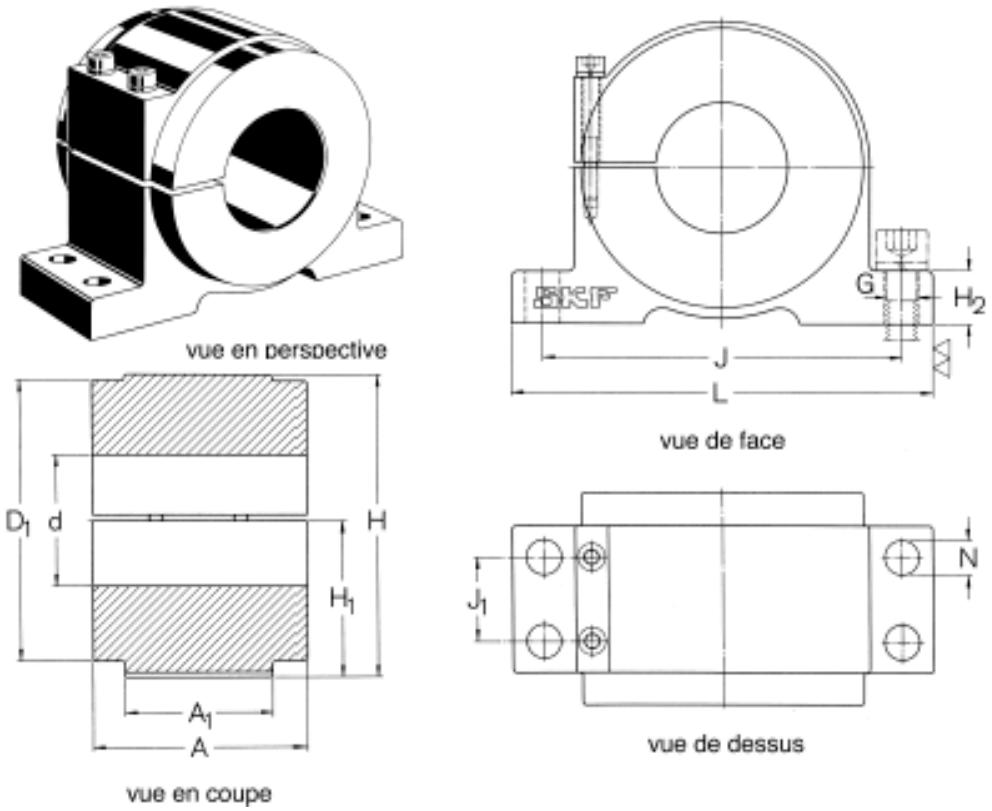


Les conventions du dessin en perspective ne sont pas précisément enseignées dans l'enseignement primaire ni dans l'enseignement secondaire, mais on se contente d'énoncer quelques principes.

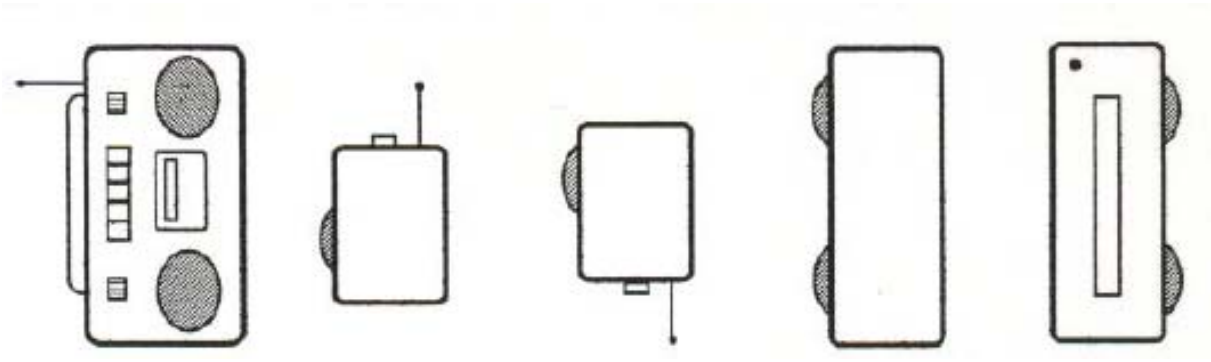
Le dessin technique

Le dessin technique consiste à effectuer des projections de l'objet à représenter sur trois plans : le plan frontal, le plan horizontal et le plan de profil. Les dessins obtenus sont appelés des « vues », respectivement la vue de face, la vue de dessus et la vue en coupe.

Voici par exemple la représentation d'une pièce mécanique, les projections donnent l'impression que la pièce est translucide, même si elle est opaque :



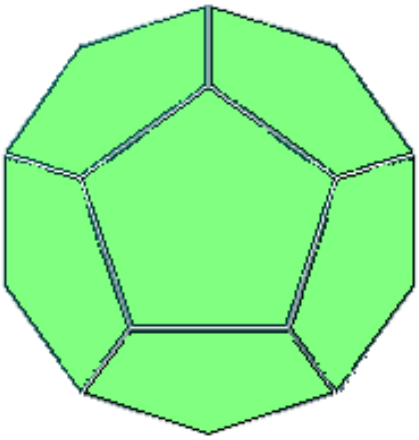
Pour initier les élèves à raisonner à partir de vues, on propose aux collégiens des représentations où ne sont indiqués, sur chaque vue, que les éléments qui sont vus effectivement. Voici par exemple un exercice où l'on demande aux élèves de nommer les cinq vues ci-dessous :

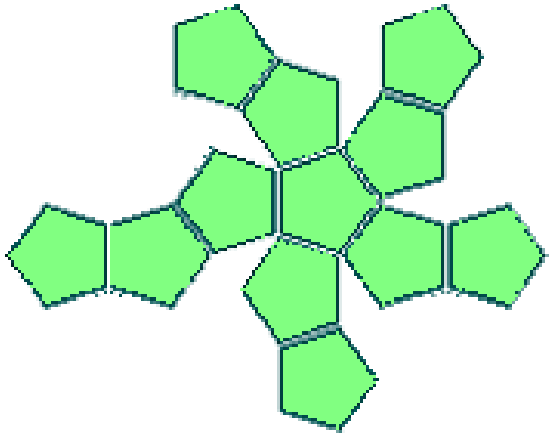


Les développements (ou patrons) d'un polyèdre

Un développement, ou patron, d'un polyèdre est une représentation plane de toutes les faces du polyèdre de telle sorte que chaque face soit reliée à une autre au moins par une arête commune, que l'ensemble ainsi constitué soit d'un seul tenant et qu'il permette (si l'on considère cette représentation comme un objet de l'espace physique et non comme une abstraction de l'espace géométrique) de reconstituer ce polyèdre. À noter : un développement ne comporte pas de languette de collage qui permettrait que les faces soient effectivement reliées les unes aux autres.

Les tâches proposées aux élèves peuvent être de dessiner le développement d'un polyèdre qu'ils ont sous les yeux ou dont ils ont une représentation en perspective, de choisir parmi plusieurs patrons celui ou ceux qui correspondent à ce polyèdre.





La représentation d'un objet de l'espace physique peut avoir comme but de permettre d'identifier un objet parmi d'autres ou de le construire. Dans les deux cas la validation peut être faite par l'expérience. Des situations « émetteur – récepteur » sont souvent proposées aux élèves pour leur laisser la charge de la validation.

Une situation « émetteur – récepteur » fait, comme le nom l'indique, intervenir un émetteur et un récepteur qui sont, soit un élève, soit un groupe d'élèves. L'émetteur envoie un message (un texte ou un dessin) à propos d'un objet de l'espace physique ou de l'espace géométrique pour que le récepteur puisse identifier ou construire l'objet. Cette situation de communication vise la mise en place d'un langage mathématique, la validation fait partie intégrante de l'activité et s'effectue par comparaison entre l'objet à l'origine du message et celui qui a été produit. La principale limite de la situation « émetteur – récepteur » est que les élèves peuvent se comprendre alors même que les moyens qu'ils utilisent pour communiquer ne sont pas mathématiquement suffisants.

2. Représentations langagières d'un objet ou d'un dessin

La production d'un texte représentant un objet de l'espace physique ou un dessin (objet de l'espace graphique) est une description. L'objectif de la description peut être de reconnaître l'objet parmi un ensemble d'objets, ou de réaliser cet objet. Les situations de description qui sont proposées aux élèves visent l'apprentissage de vocabulaire, de propriétés géométriques et de leur utilisation adéquate.

Décrire pour reconnaître

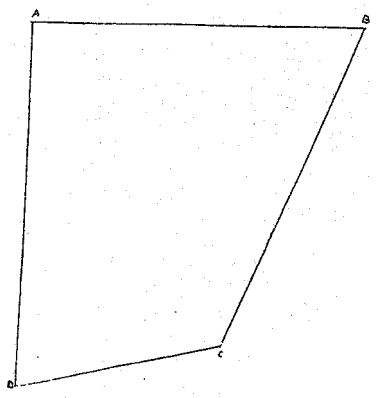
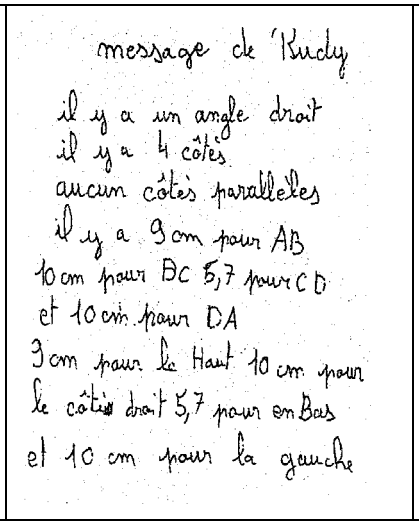
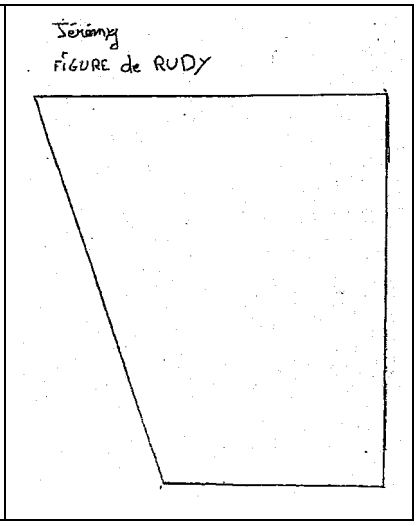
Une description pour reconnaître un objet parmi d'autres, comporte des propriétés de l'objet qui permettront de le distinguer des autres. L'auteur de la description raisonne alors sur les propriétés qui différencie l'objet qu'il décrit des autres objets. S'il s'agit par exemple

d'une situation du type « émetteur – récepteur » où l'émetteur commande une pièce « Polydron » pentagonale à un récepteur, il suffira à l'émetteur d'indiquer que sa pièce possède cinq côtés car il n'y a qu'un type de pentagone parmi les pièces « Polydron ».

Décrire pour construire

L'objectif de la description d'un objet peut être aussi de le construire, sans l'avoir sous les yeux. Dans ce cas la description doit être complète, c'est-à-dire porter sur les éléments, leurs dimensions et leur organisation relative. Une chronologie de la construction permettra au destinataire de la description de procéder étape après étape.

Exemple : Des élèves, en fin de CM1, devaient dessiner un quadrilatère et rédiger un message permettant au récepteur de dessiner le même quadrilatère. Voici à gauche le dessin et le message de Rudy ainsi que la production de Jeremy.

Dessin de Rudy		
	 message de Rudy il y a un angle droit il y a 4 côtés aucun côtés parallèles il y a 9 cm pour AB 10 cm pour BC 5,7 pour CD et 10 cm pour DA 9 cm pour le Haut 10 cm pour le côté droit 5,7 pour en Bas et 10 cm pour la gauche	 Jeremy FIGURE de RUDY

Il faut avoir bien conscience, lors d'une analyse *a priori* d'une situation que les élèves peuvent très bien se « comprendre » malgré les imprécisions du message : si Jeremy n'avait dessiné deux angles droits, le message aurait pu être jugé satisfaisant par les élèves alors qu'il ne l'était pas parce que la position de l'angle droit n'était pas précisée. Le fait que l'émetteur et le récepteur soient des groupes d'élèves et non des élèves seuls, favorise la diversité des avis. L'accord à trouver conduit alors à des négociations et à des choix qui sont profitables aux apprentissages et qui peuvent être plus facilement retravaillés en classe avec le professeur.

III. Représentations d'une figure géométrique

Les figures géométriques sont des objets de l'espace géométrique donc des objets abstraits. Il n'y a pas qu'une représentation graphique d'une figure géométrique donnée car il existe différentes conventions de représentation. Chaque représentation est un objet de l'espace graphique.

Dans le cas du dessin d'une figure géométrique, le savoir sous-jacent à la construction importe peu, mais la représentation des propriétés doit être visible. Ainsi un segment de 4cm, en tant que figure, doit être représenté, en tant que dessin par un tracé rectiligne dont les extrémités sont séparées par une distance de 4cm qu'on peut mesurer à la règle.

Dans une construction géométrique, c'est au contraire le savoir sous-jacent à la construction qui discrimine une représentation correcte d'une qui ne l'est pas. Prenons un exemple simple. S'il s'agit de « dessiner » deux segments parallèles qui ne sont pas très éloignés l'un de l'autre, la règle suffit car le parallélisme est contrôlé visuellement entre le premier tracé de segment et le bord de la règle qui va servir pour réaliser le second tracé. S'il

s'agit en revanche de « construire » deux segments parallèles, c'est la méthode s'appuyant sur des propriétés qui est importante, et si cette méthode nécessite des tracés auxiliaires, il convient de ne pas les effacer.

On utilise aussi parfois, pour résoudre un problème de géométrie, un troisième type de représentation graphique qu'on appelle « dessin à main levée » d'une figure. Comme son nom l'indique, un tel dessin représente les propriétés de la figure par des conventions sans rechercher de conformité entre le dessin obtenu et les propriétés représentées.

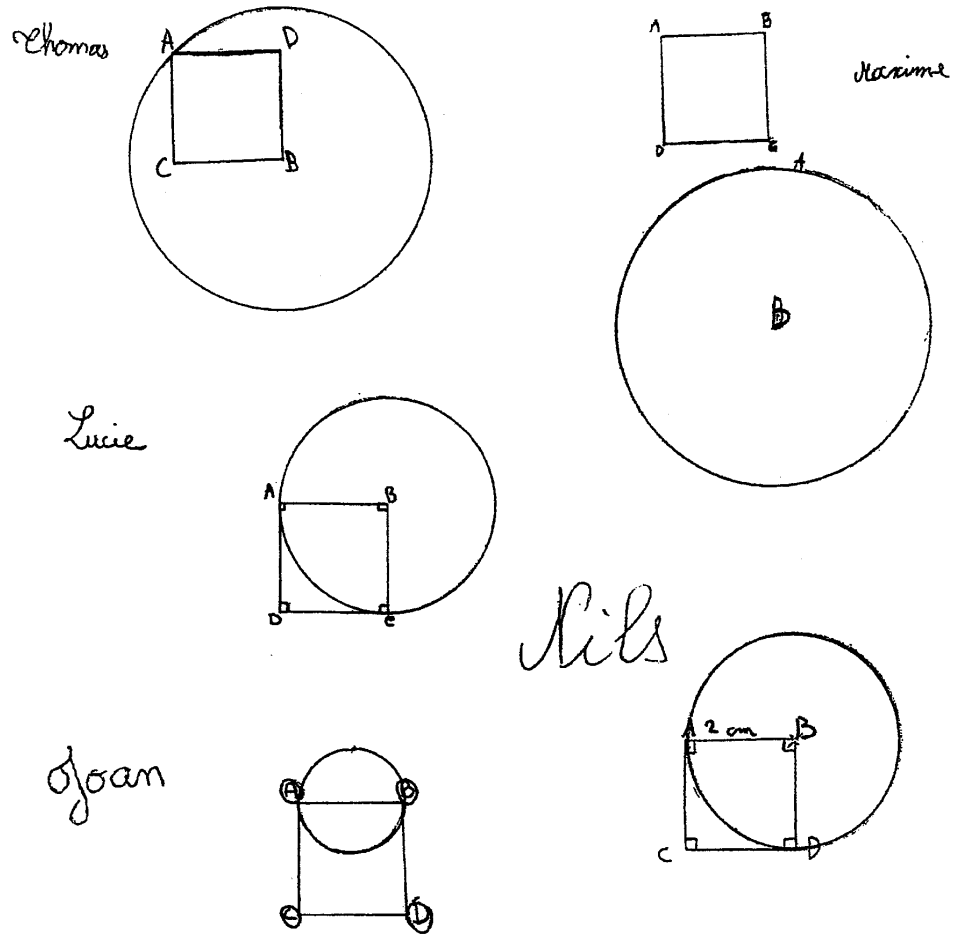
1. Dessin d'une figure géométrique donnée par sa description

Demander de dessiner une figure géométrique donnée à partir d'un dessin revient à demander la reproduction du dessin, cette tâche a déjà été abordée précédemment : elle nécessite le repérage de sous-figures ou de sur-figure dans le cas d'une figure complexe, elle demande de savoir comment utiliser les instruments de géométrie ainsi que de posséder certaines habiletés quant à la manipulation de ces instruments.

Dessiner une figure à partir de sa description demande toujours de savoir utiliser les instruments de géométrie mais aussi, en amont, de comprendre la description c'est-à-dire de connaître le vocabulaire et les conventions utilisés en géométrie.

Dans l'exemple suivant les élèves de CM2 devaient répondre à la consigne suivante :

« *Dessine un carré ABCD de côté 2 cm*
et trace le cercle de centre B passant par A. »



Les productions des élèves montrent que cette simple consigne nécessite bien sûr de connaître le vocabulaire carré et cercle avec l'expression idiomatique « passant par », de

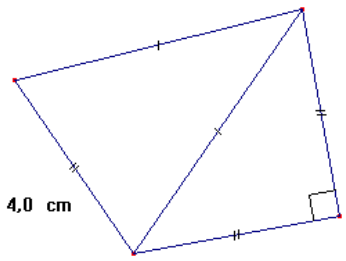
savoir tracer un carré dont on donne la longueur des côtés, et un cercle dont on donne le centre et un point. Elle nécessite aussi de connaître les conventions quant à la désignation des points d'un quadrilatère, et plus généralement d'une figure géométrique. On remarque en particulier que certains élèves confondent le point et la lettre qui le désigne, comme Maxime ou Joan. Les productions de Lucie et de Nils révèle la confusion entre dessin et figure propre aux débuts de l'apprentissage de la géométrie : les codages et indications sont inutiles dans ce contexte. On constate enfin que la convention selon laquelle une désignation ne peut être utilisée pour deux objets mathématiques différents n'est pas connue de Maxime qui réalise un dessin comportant deux points notés A et deux points notés B.

2. Construction d'une figure géométrique donnée par un dessin à main levée

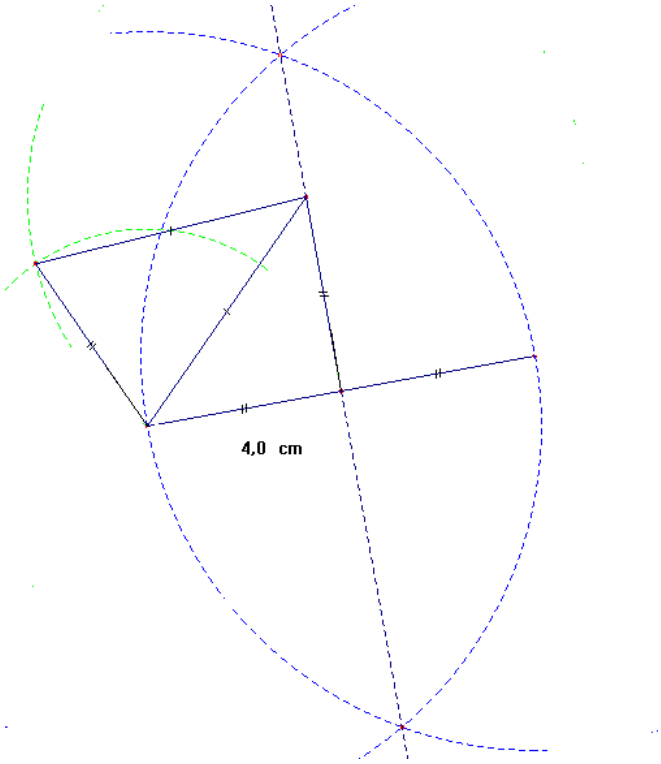
Lorsque la figure à construire est donnée par un dessin à main levée, l'élève commence par repérer les sous-figures, leurs propriétés et leur organisation, comme lorsqu'il doit reproduire un dessin. Mais les informations ne sont pas à prendre sur le dessin proposé avec les instruments, il faut seulement tenir compte des informations qui sont indiquées par des codages ou par des indications textuelles. Une chronologie de la construction est à élaborer, ce qui nécessite d'anticiper la construction, c'est-à-dire de la réaliser mentalement en partie en fonction des propriétés des sous-figures.

Considérons par exemple la tâche suivante :

« *Construire la figure représentée ci-contre à la règle et au compas* ».



La figure comporte deux triangles isocèles dont un est aussi rectangle. Les codages montrent que les côtés perpendiculaires du triangle rectangle mesurent 4cm comme la base du second triangle isocèle, l'hypoténuse du triangle rectangle en revanche n'est pas donnée.



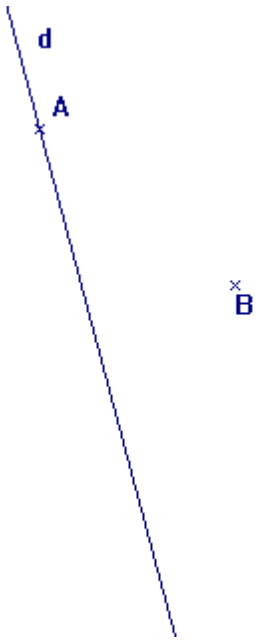
La construction demande donc de commencer par le triangle rectangle. Comme l'équerre n'est pas autorisée, c'est un segment de 8 cm qui est tracé et l'angle droit est construit par médiatrice de ce segment, on retient alors un segment de 4cm et une perpendiculaire à ce segment. Avec la règle ou le compas, l'autre côté du triangle rectangle est déterminé. Il ne manque plus que la construction du quatrième sommet au compas comme intersection des cercles ayant respectivement pour centre les extrémités de l'hypoténuse et pour rayon 4cm et la longueur de l'hypoténuse.

3. Construction d'une figure géométrique donnée par une description

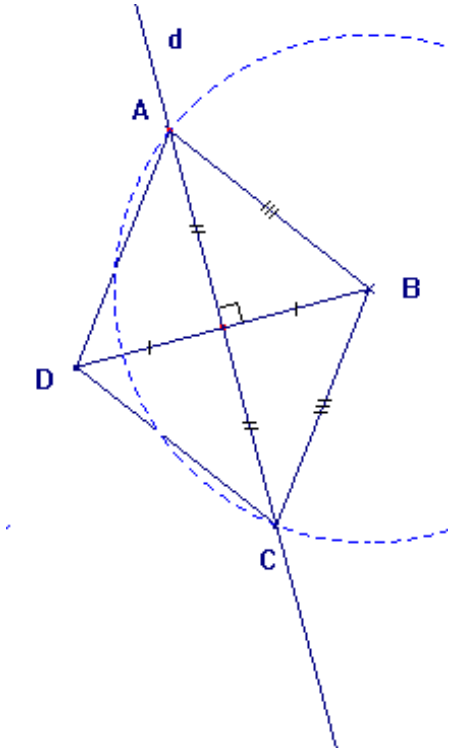
La construction d'une figure donnée par une description est facilitée par une anticipation du résultat à obtenir (sous-figure et organisation) qui demande, pour chacune des sous-figures identifiées, de mobiliser des « figures modèles » stockées en mémoire à long terme et de les particulariser à la configuration proposée. Lorsque la figure est très complexe ou que les contraintes sont nombreuses, la gestion mentale des informations est difficile et la réalisation d'une figure à main levée soulage l'effort de mémoire. Comme pour la construction d'une figure donnée par un dessin, il s'agit ensuite de déterminer les propriétés des sous-figures qui pourront être utiles et de déterminer une chronologie de la construction.

Comparons deux exemples. Le premier exercice a été donné à des élèves de sixième.

Construire un losange ABCD ayant la droite d pour axe de symétrie.



Solution :

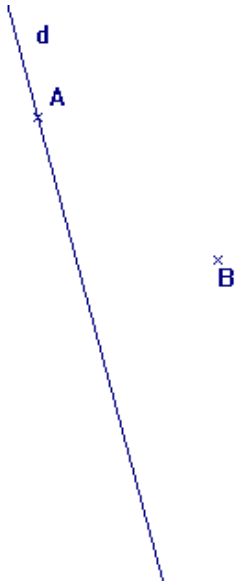


La figure losange à anticiper est proche de la figure modèle de losange qu'on a tous en mémoire, la droite d n'étant que légèrement inclinée. Deux propriétés sont mobilisables : un losange est symétrique par rapport à ses diagonales (ou les diagonales d'un losange sont perpendiculaires et ont même milieu) ; un losange a ses quatre côtés de même longueur.

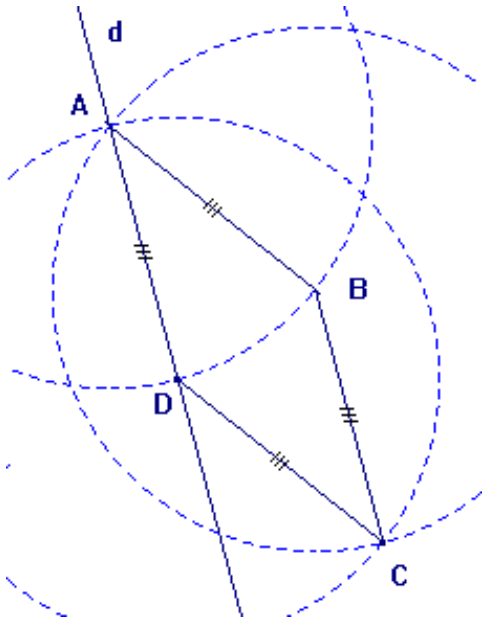
La première propriété conduit à la construction de D comme symétrique du point B par rapport à la droite d, puis du point C comme symétrique du point A par rapport à la droite (BC). La seconde permet de construire le point C sur la droite d puis le point D comme intersection des cercles de même rayon AB et de centres respectifs A et C. La construction peut aussi s'effectuer en mobilisant les deux propriétés à la fois : la symétrie pour obtenir D puis l'égalité des longueurs des côtés pour construire C.

Posé en fin d'année de sixième, un tel exercice est réussi par trois élèves sur quatre environ. Voyons maintenant un exercice posé en fin de 5e, toujours sur la construction d'un losange.

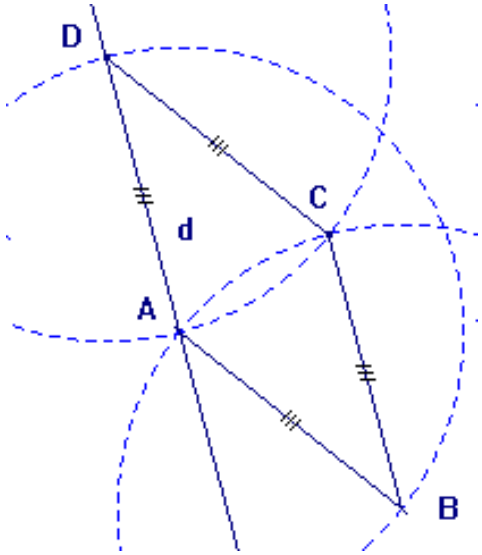
Construire un losange ABCD
tel que le point D appartiennent à la droite d.



Solution 1 :



Solution 2 :



Le point A est à égale distance de B et de D donc D appartient au cercle de centre A et de rayon AB. Ce cercle coupe la droite d en deux points qui sont deux candidats possibles pour le point D. La construction du point C à l'intersection du cercle de centre B et de rayon AB et du cercle de centre D et de rayon AB aboutit pour chacun des deux points D candidats.

On en déduit qu'il y a deux solutions, aucune d'entre elles ne correspond à l'image modèle du losange avec ses axes de symétrie.

Alors qu'il porte sur le losange sans porter sur la symétrie orthogonale, posé en fin de cinquième, un tel exercice est réussi par moins d'un élève sur trois, le critère de réussite étant bien sûr d'avoir produit une des deux solutions possibles. La configuration proposée d'un losange avec une droite qui n'est pas un des axes de symétrie, presque en position verticale ou horizontale, a certainement perturbé les élèves qui avaient anticipé le résultat par une figure modèle composée d'un losange et d'une droite passant par deux sommets.

4. Programme de construction d'une figure géométrique donnée

Un programme de construction d'une figure géométrique est un texte permettant à celui qui le lit de tracer un dessin de cette figure alors qu'il ne l'a connaît par aucune autre représentation langagière ou graphique. Ce n'est pas une description mais un texte injonctif.

Rédiger un programme de construction suppose une analyse de la figure à faire construire pour ses propriétés qui vont permettre la construction : repérer les sous-figures et de leur organisation en définissant en particulier les relations d'incidence et les points

remarquables, hiérarchiser ces relations pour définir une chronologie de la construction organisée en étapes, introduire des notations éventuelles pour répondre aux besoins de la communication. Lorsque la figure dont un élève ou un groupe d'élève élabore le programme de construction est donnée par un dessin et un texte qui précise certaines propriétés de la figure, la validation du programme peut s'effectuer par comparaison entre le dessin produit et le dessin initial.

Les programmes de construction se présentent comme une suite d'instructions ordonnées chronologiquement. La suite d'étapes nettement repérées (tirets, numérotation...) met en valeur la suite d'actions à accomplir définies par des verbes (à l'impératif ou à l'infinitif) qui portent sur des objets géométriques et pas sur des objets de l'espace physique comme le support ou les instruments par exemple.

À la fin de ce paragraphe consacré aux multiples représentations utilisées en géométrie, apparaissent entre l'espace physique et l'espace géométrique deux modes de représentations, l'un langagier l'autre graphique, qui ne se réduisent, ni l'un ni l'autre, à un seul type de représentation.

Ainsi, les textes représentant les objets utilisés en géométrie comportent plus ou moins de références aux propriétés qui caractérisent les objets considérés, et en particulier leur construction géométrique. Les descriptions sont, pour cette raison, à distinguer des programmes de construction. De même que les textes, les objets de l'espace graphique sont plus ou moins porteurs des propriétés géométriques des objets qu'ils représentent, et différentes conventions ont été établies. Pour représenter des objets tridimensionnels on peut effectuer un dessin en perspective, un dessin technique et, si cet objet est un polyèdre, un patron. Pour les objets bidimensionnels, on a distingue premièrement les dessins qui comportent les informations concernant la mesure des longueurs et des angles (informations soumises aux incertitudes de la mesure), deuxièmement les dessins à main levée qui synthétisent les propriétés géométriques de l'objet à représenter grâce à des codes et à des annotations complémentaires, et troisièmement les constructions géométriques qui, comme les dessins, comportent les informations concernant la mesure des longueurs et des angles, mais qui montrent aussi, par les tracés intermédiaires qui ont permis la construction, les propriétés géométriques qui ont été utilisées pour réaliser cette construction.

D. Utilisations des figures en géométrie

Le dernier paragraphe a montré que la multiplicité des signifiants en géométrie pouvait être utilisée dans l'enseignement pour, par des tâches de passage d'un signifiant à l'autre, favoriser la réflexion sur les objets géométriques et leurs propriétés et, par-là même, en favoriser l'apprentissage. L'enseignement de la géométrie ne se limite pas à celui de ses objets et de leur propriété, il vise aussi l'apprentissage de méthodes pour résoudre des problèmes, c'est-à-dire pour découvrir des nouveaux objets ou établir des propriétés nouvelles (la nouveauté étant ici pour l'apprenant) ou pour particulariser des propriétés générales à des contextes particuliers.

Les figures ont une importance particulière en géométrie. En représentant graphiquement une figure, celui qui fait de la géométrie se donne un moyen d'accéder simultanément, pour chaque objet géométrique de la situation qu'il étudie, à ses propriétés et à ses relations avec les autres objets présents dans la situation. La figure aide la mémorisation de l'ensemble de ces relations. Elle est un moyen heuristique aussi car la représentation synthétique qu'elle permet des propriétés de la situation géométrique étudiée, donne la

possibilité d'apercevoir des propriétés nouvelles ou des idées pour les démontrer. C'est cette diversité des utilisations des figures en géométrie qui est l'objet de ce paragraphe.

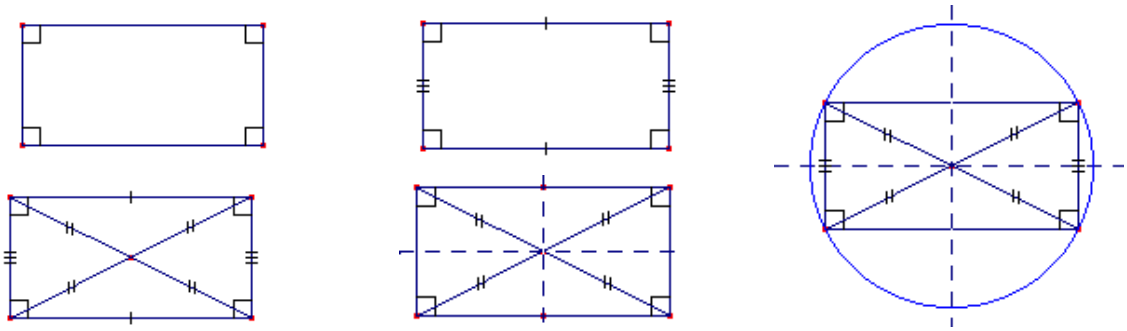
I. Des figures à connaître pour les reconnaître

Les figures sont à la fois mémorisées et reconnues à travers des dessins qui les représentent. En outre, la mémorisation des figures permet de mémoriser un ensemble très riche de propriétés géométriques. Pourtant une figure mémorisée, même parmi les plus simples, n'est pas forcément reconnue à travers des dessins qui la représentent. Et une figure peut être associée à des situations qui n'en ont pas les propriétés.

1. Les figures « prototypes »

La résolution de problèmes géométriques demande parfois de gérer simultanément beaucoup d'informations sur la situation qui est traitée. Robert Noirfalise (1991) a réalisé des travaux qui laissent supposer que des figures stockées en mémoire à long terme, qu'il appelle figures « prototypes », agglomèrent plusieurs informations qui sont traitées comme une seule unité. D'après l'auteur, cela permet au sujet de disposer en mémoire de travail d'une quantité d'informations très importante, plus importante que celle qu'il est capable de retenir si ces informations lui étaient données une à une, par exemple par une description. En outre, pour une même figure « prototype », les sujets enregistrent plus ou moins d'informations et cela différencient leur possibilité de traitement : pour une même quantité d'informations, certains sujets mobilisent une unité de mémoire alors que d'autres en mobilisent davantage.

Voici par exemple pour la figure « prototype » du rectangle, différentes informations qui peuvent être mémorisées simultanément.



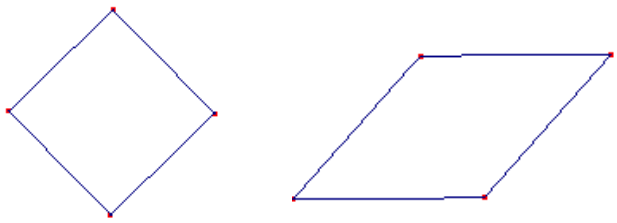
Noirfalise suggère aussi que le nom des points importants des figures « prototypes » pourraient être stockés en mémoire à long terme aussi ce qui soulagerait encore la mémoire de travail. On remarque effectivement que les sommets d'un triangle sont souvent notés A, B et C, que les milieux des côtés [AB], [AC] et [BC] sont respectivement notés C', B' et A', que le centre de gravité, du cercle circonscrit et du cercle inscrit sont respectivement notés G, O et I, etc.

2. Adaptation des figures « prototypes »

Les figures « prototypes » ne sont pas mémorisées dans toute leur généralité, mais elles restent plus ou moins marquées de caractères particuliers (de forme ou d'orientation), cela le conduit à nommer figures « prototypes » ces figures mémorisées.

Par exemple, la figure « rectangle », comme la figure « carré », est mémorisée sous une forme prototype où les côtés sont horizontaux et verticaux, alors que la figure losange est mémorisée sous une forme prototype où les deux axes du losange (ses diagonales) sont respectivement vertical et horizontal et le plus long est vertical. Rectangle et losange sont « allongés » dans des proportions standards, ni trop ni trop peu.

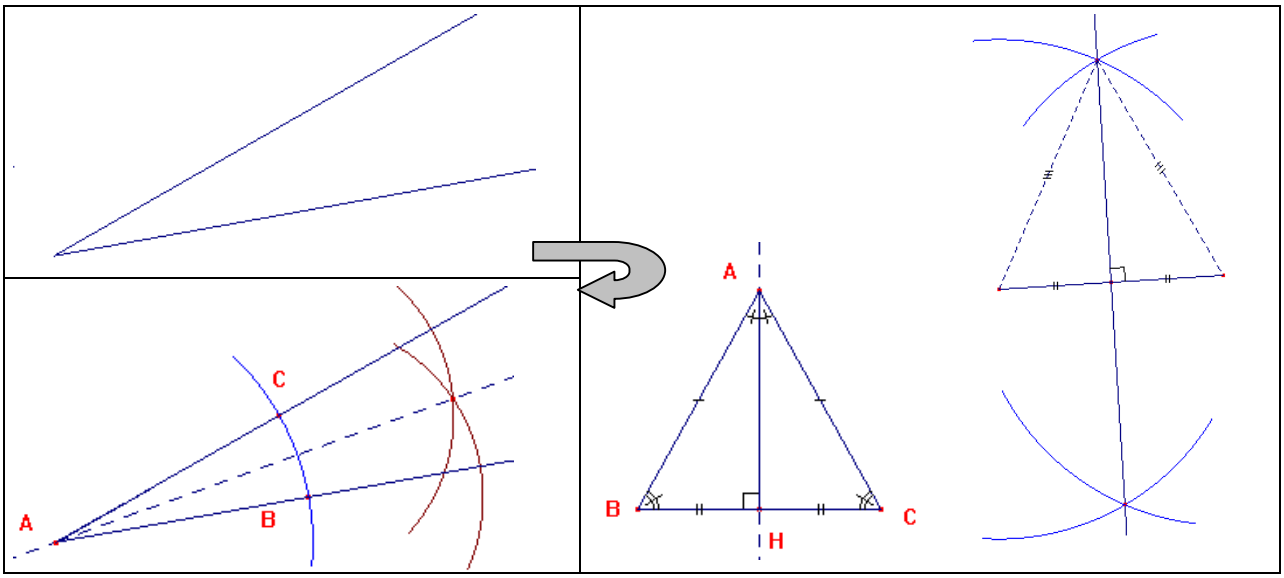
Cela permet d'expliquer que beaucoup de personnes reconnaissent un losange et pas un carré lorsqu'on leur présente la représentation ci-contre à gauche, ou reconnaissent un parallélogramme et pas un losange dans la représentation ci-contre à droite.



Il ne s'agit pas ici d'affirmer que de reconnaître le dessin de gauche comme un carré ou celui de droite comme un losange est une compétence géométrique, puisque le fait que ces dessins illustrent respectivement un carré ou un losange ne peut être « vu » mais « su ». En revanche, on peut penser que si dans un problème, en disposant de données supplémentaires sur les figures représentées par ces dessins, il fallait démontrer que la figure représentée à gauche est un carré et que la figure représentée à droite est un losange sans que cela soit demandé explicitement, celui ou celle qui n'identifiera pas ces dessins comme pouvant représenter respectivement un carré et un losange, risque de ne jamais chercher à le démontrer.

De même, on a remarqué précédemment que l'anticipation du dessin à obtenir peut faciliter une construction géométrique, or l'anticipation repose sur une mobilisation de figures mémorisées et les adapter à la situation. Or plus une figure « prototype » est marquée par une disposition particulière, plus elle est difficile à adapter à un contexte qui la place dans une autre disposition. Cela permet d'expliquer pourquoi les deux problèmes de constructions d'un losange qui ont été présentés dans le paragraphe C.III.3 intitulé *Construction d'une figure géométrique donnée par une description*, sont réussis avec autant de différence : le premier, donné en classe de 6e, rappelle davantage que le second, donné en classe de 5e, la figure « prototype » du losange avec sa diagonale la plus longue en position verticale.

Autre exemple : pour construire à la règle et au compas la bissectrice d'un angle donné, on mobilise la figure prototype du triangle isocèle avec sa bissectrice qui est aussi médiatrice de la base, ainsi que la figure prototype de la médiatrice d'un segment à condition de les connaître suffisamment et qu'elles puissent mentalement changer leur orientation.



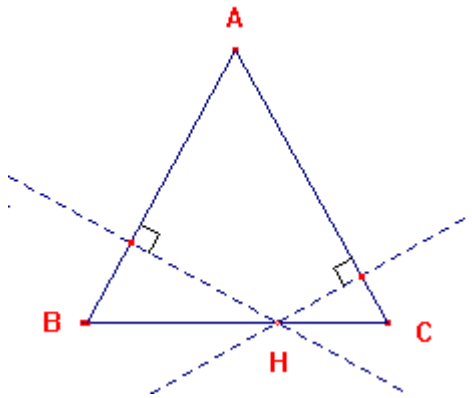
Ces figures prototypes joueraient donc un rôle heuristique dans la résolution de problème, plus ou moins efficace suivant la capacité du sujet à les adapter (les agrandir ou les réduire, changer leur orientation, etc) à la situation qu'il doit traiter.

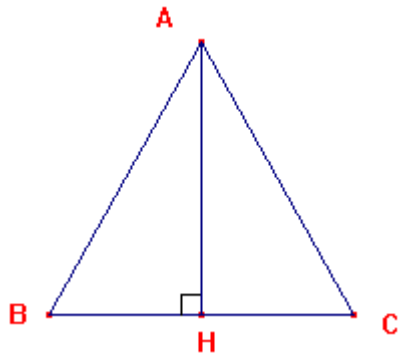
3. Les figures « prototypes » sont prégnantes

Robert Noirfalise a proposé à des élèves en fin de 6e d'écouter attentivement la consigne suivante, puis de la réaliser de mémoire :

Tracer un triangle isocèle ABC tel que AB = AC. *Marquer un point H sur [BC].* *De H, tracer la perpendiculaire à (AB) puis à (AC).*

La figure correcte est représentée par le dessin de gauche n'est obtenue par aucun des élèves qui répondent pour 40% avec le dessin de droite.





L'interprétation proposée est qu'à la lecture d'un énoncé décrivant une figure géométrique, dès son commencement, un sujet active une figure « prototype » qu'il modifie pour la particulariser à l'énoncé. Jusqu'au mot *perpendiculaire* de l'énoncé, la figure « prototype » du triangle isocèle avec son axe de symétrie est correcte. La modification profonde à opérer pour aboutir à la bonne réponse étant trop coûteuse pour les élèves de 6e, aucun ne parvient à la dessiner et 40% d'entre eux en restent à la figure qu'ils n'ont pas pu adapter.

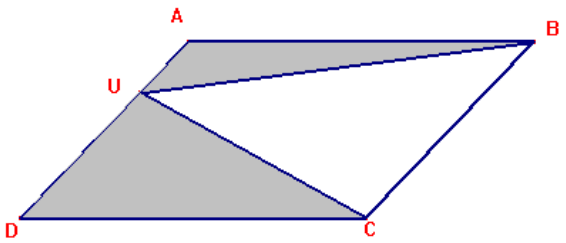
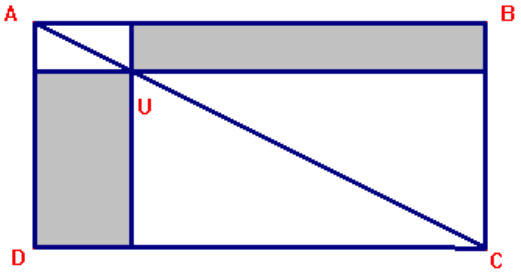
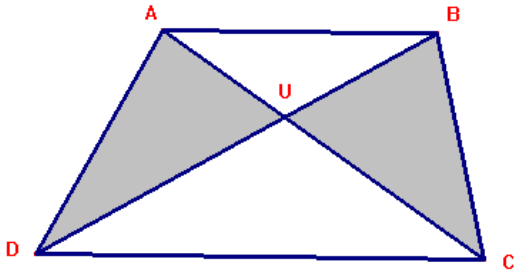
II. Traitements d'une figure dans l'activité géométrique

Nous avons vu jusqu'à présent des tâches géométriques qui conduisaient à décrire, à représenter ou à construire une figure, et cela correspond au fait que les objets géométriques, en géométrie axiomatique « naturelle » qui est la géométrie enseignée dans l'enseignement primaire et secondaire, sont facilement représentables du fait même des relations qui les lient à l'espace physique.

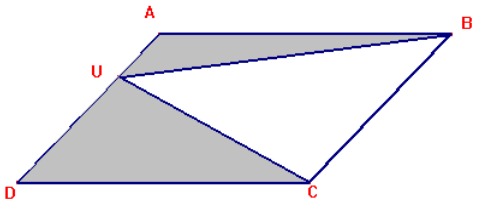
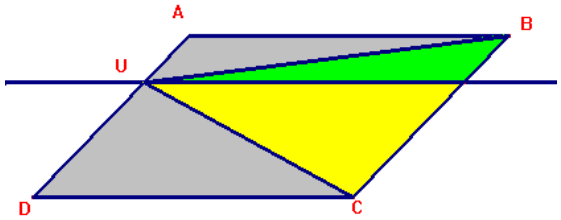
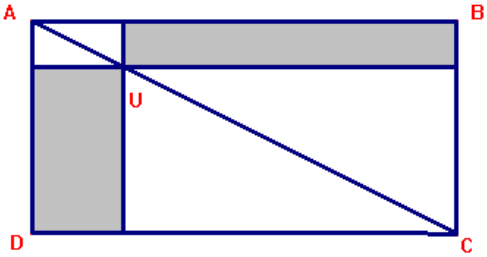
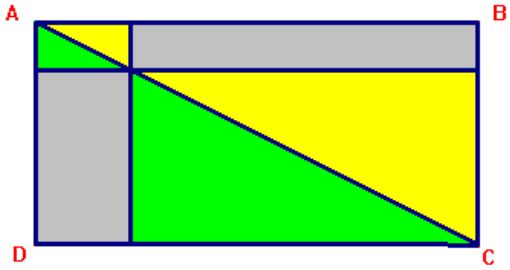
Il existe d'autres domaines des mathématiques dans lesquels on réalise des schémas ou des représentations graphiques à des fins heuristiques. L'importance des figures en géométrie, ne s'explique pas seulement parce que la recherche d'un problème conduit à les représenter. Bien souvent les figures sont modifiées car ce sont précisément les modifications imposées à une figure qui donnent les idées directrices qui permettront d'établir les propriétés recherchées, et cela même si démonstration est déductivement complexe. Dans un article consacré aux différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, Raymond Duval (1994) distingue trois types de traitement des figures qui permettent de résoudre des problèmes : ceux dans lesquels les figures sont reconfigurées par des partages ou des combinaisons, ceux qui agrandissent ou réduisent les figures et ceux qui conduisent à des partages avec déplacement de certaines parties de la figure. Les trois types de traitement sont présentés à travers des problèmes géométriques qu'ils permettent de résoudre.

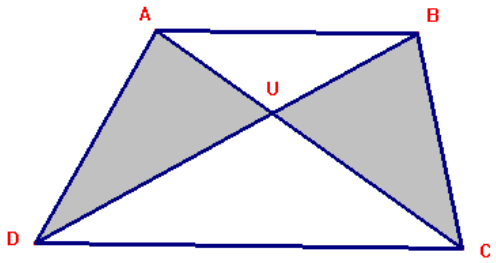
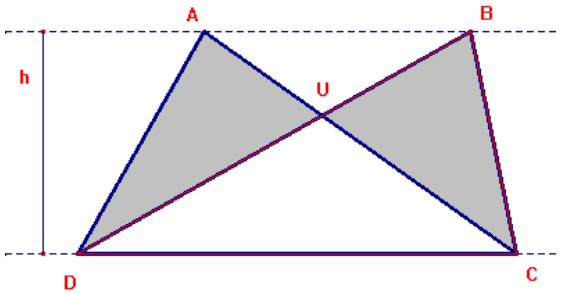
1. Reconfigurations d'une figure géométrique

Afin d'illustrer le travail de reconfiguration des figures géométriques, voici trois problèmes dont l'objectif est chaque fois de comparer des aires.

Problème n°1	ABCD est un parallélogramme et U est un point de [AD]. Où faut-il placer U pour que la surface coloriée et la surface blanche aient la même aire ?	
Problème n°2	ABCD est un rectangle et U est un point de [AC]. Où faut-il placer U pour que les deux rectangles coloriés aient la même aire ?	
Problème n°3	ABCD est un trapèze et U est le point d'intersection des diagonales. Comparer les aires des triangles coloriés.	

Chacun de ces trois problèmes trouve sa solution par une reconfiguration de la figure, mais ces reconfigurations sont très différentes les unes des autres si bien que ces trois problèmes ne sont pas réussis de la même façon : donnés de façon plus fermée dans des classes de 3e (la question était de montrer que les aires sont égales et non de trouver la position du point U pour qu'elles le soient), ils recueillent respectivement environ 60%, 60% et 10% de réussite (Mesquita, 1989).

« Solution » n°1	 
« Solution » n°2	 

« Solution » n°3	 

Dans le premier problème, la reconfiguration passe par un partage en sous figures pertinentes qui n'est pas donné. Dans le second problème, le partage est déjà effectué mais la reconfiguration demande de combiner des sous-figures pour en réaliser d'autres. Dans le dernier problème enfin, le partage est déjà effectué et la reconfiguration demande de combiner des sous-figures pour en réaliser d'autres, mais en plus, il y a un « dédoublement » d'une sous-figure qui est utilisée de deux façons différentes : une fois pour elle-même et deux fois dans une combinaison avec une autre sous figure. En outre, le troisième problème demande de mobiliser une propriété des triangles de même base et de même aire.

Dans ces trois problèmes, le traitement de la figure est une reconfiguration puisque les sous-figures ne subissent aucune transformation géométrique, contrairement aux traitements que nous allons étudier ci-dessous où les sous-figures peuvent être déplacées ou agrandies.

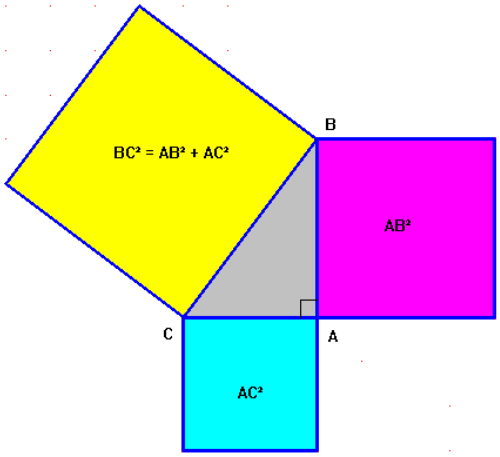
2. Déplacements de sous-figures géométriques

Voici maintenant deux problèmes qui conduisent à déplacer des sous-figures géométriques : une démonstration classique du théorème de Pythagore et un problème d'optimisation de longueur.

Rappelons que trois énoncés mathématiques différents portent le nom de Pythagore.

<u>Théorème de Pythagore</u> :

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés perpendiculaires.



Autrement dit :

Dans un triangle ABC,

si ABC est rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

<u>Contraposée du théorème de Pythagore :</u>

Dans un triangle ABC,

si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors ABC n'est pas rectangle en A.

<u>Réciproque du théorème de Pythagore</u> :

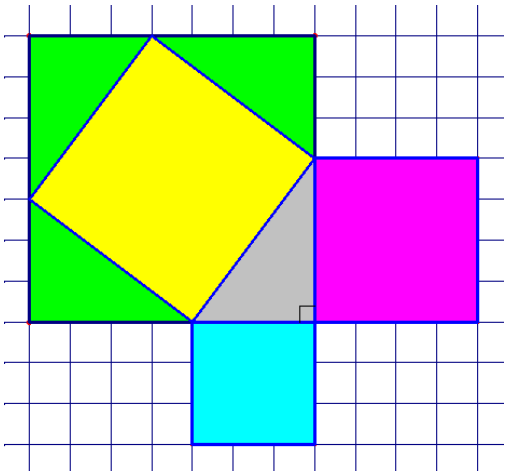
Dans un triangle ABC,

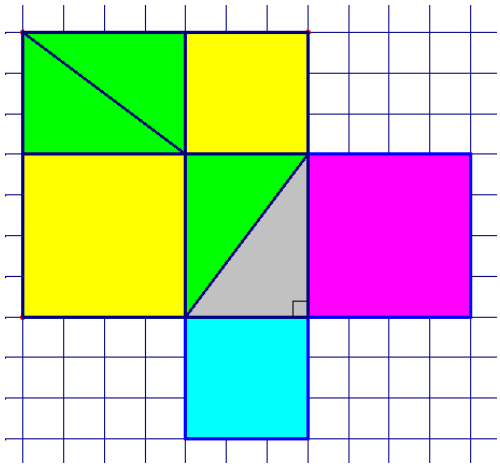
si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors ABC est rectangle en A.

De nombreuses démonstrations de ce célèbre théorème ont été proposées qui traduisent l'égalité en une égalité d'aire : l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés construits sur les côtés perpendiculaires. Voici l'idée directrice de l'une d'entre elles, qui repose essentiellement sur des déplacements de sous-figures.

À la figure initiale, on ajoute en en vert, les triangles superposables au triangle rectangle initial (gris) qui bordent le carré jaune.

En déplaçant les triangles verts, l'aire de la surface jaune n'est pas modifiée, elle est exactement égale à la somme des aires des carrés bleu et rose.



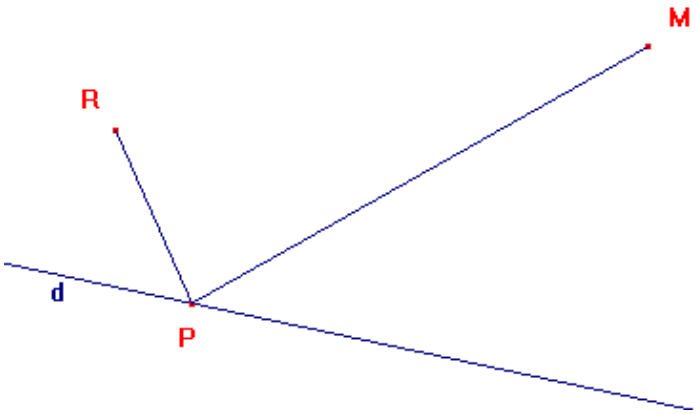


On comprend ici combien l'idée centrale de la démonstration est liée à représentation graphique de la figure et combien aussi reste important le travail qui permettra de mettre en mot la démonstration du théorème. À noter encore qu'une telle démonstration appartiendrait à la géométrie axiomatique « naturelle » puisque malgré la rédaction, les principes et les définitions fondatrices restent implicites.

Voici maintenant un problème d'optimisation de longueur qu'on pourrait présenter dans un contexte de l'espace physique :

Maud est sur la plage et construit un château de sable. Son frère Raphaël n'est pas très loin d'elle, avec le seau, vide. Maud lui demande de remplir le seau d'eau et de le lui apporter. Le bord de mer étant rectiligne, quel sera le plus court chemin pour Raphaël ?

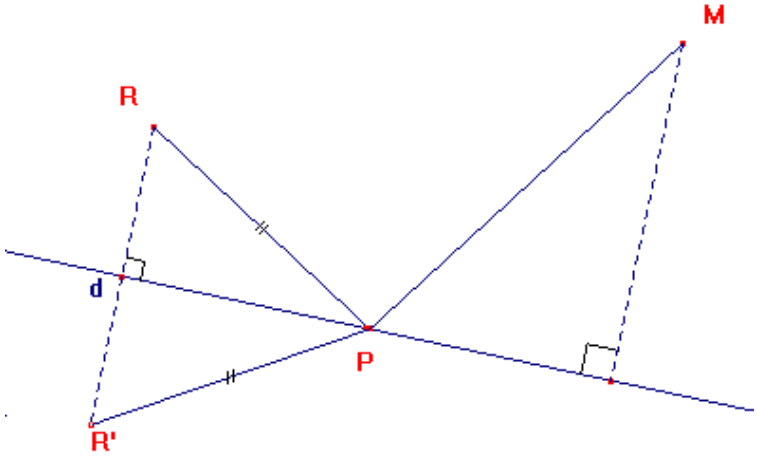
Après modélisation du problème dans l'espace géométrique et représentation de la figure dans l'espace graphique, on se demande où placer le point P sur la droite d pour que la somme RP + PM soit minimale.



Lorsqu'il est posé en situation scolaire, plutôt en classe de 3e, les élèves proposent généralement l'introduction de figures prototypes supplémentaire en projetant R et M en R' et M' sur la droite d. Ils proposent alors souvent de choisir comme point P soit le point R', soit le point M' soit encore le milieu du segment [R'M']. Ces tentatives infructueuses sont démenties par des prises d'informations sur le dessin : le professeur ayant la solution en tête peut proposer une autre position du point P qui minimise la longueur et les élèves s'assurent du fait que leur proposition ne réalise pas un minimum par des mesures sur le dessin.

Ils réagissent aussi parfois en affirmant que si le seau de Raphaël était plein, le trajet le plus court serait la ligne droite !

L'idée directrice qui donne la solution à ce problème est effectivement de transformer la ligne brisée RPM en une ligne délimitée par trois points dont la longueur sera minimale lorsque les points seront alignés. Il suffit pour la réaliser de considérer le symétrique R' du point R par rapport à la droite d. Cela revient à effectuer un déplacement de la sous-figure « segment [RP] » en sa symétrique par rapport à la droite d : le segment [R'P].



On remarque alors que la somme RP + PM est égale à la somme R'P + PM et qu'il suffit de choisir le point P à l'intersection de d et de (R'M) pour que les points R', P et M soient alignés, et que la somme R'P + PM soit minimale.

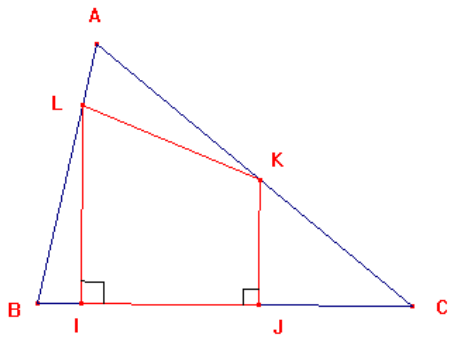
3. Agrandissements ou réductions de sous-figures géométriques

Voici un problème de construction :

ABC est un triangle. Construire un carré IJKL tel que les points I et J appartiennent au côté [BC], le point K au côté [AC] et le point L au côté [AB].

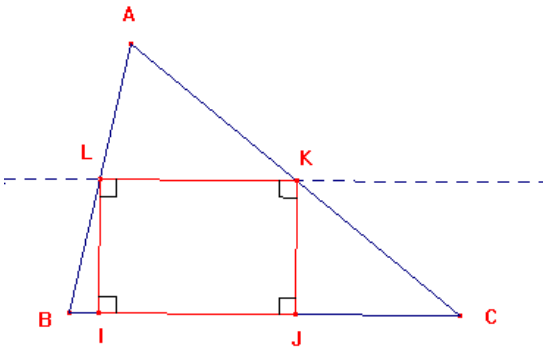
Lorsqu'il est posé à des élèves de lycée, les premiers tracés aboutissent à un trapèze rectangle car les points I et J sont placés avant K et L.

À cette étape du travail, certains élèves doutent de la possibilité de construire un tel carré.

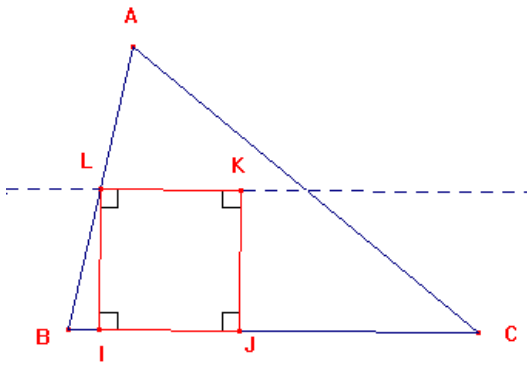


Puis les élèves tracent une parallèle (KL) à (BC) et considèrent I et J comme les projetés de L et K. La résolution du problème commence alors par la recherche de la position du point L sur le segment [AB] qui va réaliser l'égalité des longueurs LI et LK.

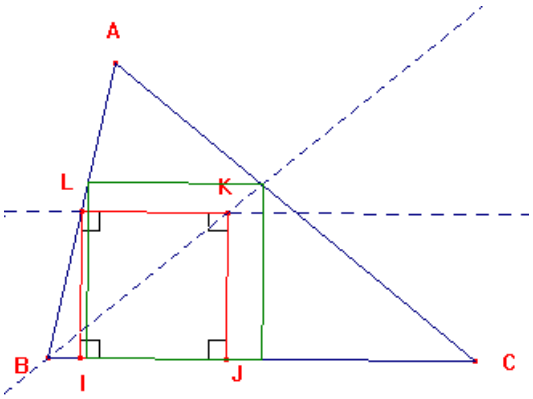
Compte tenu du changement de forme du rectangle lorsque L se déplace, les élèves ne doutent pas qu'il existe une solution



La recherche change dès que les élèves considèrent le carré IJKL de côté [LI] et recherchent une condition pour que K appartiennent au côté [AC].



L'introduction d'un agrandissement permet alors de trouver la piste principale de la construction : il s'agit d'agrandir IJKL de manière à ce que K appartiennent à [AC]. Avec éventuellement des agrandissements successifs, les élèves retrouvent une propriété d'alignement qui leur permet de construire le point K cherché puis d'en déduire le carré IJKL.



À la fin de son article consacré à l'appréhension opératoire des figures, Duval (1994) conclut que la prise de conscience de l'hétérogénéité de ces activités doit engager les professeurs dans l'enseignement spécifique de ces activités afin que les figures soient bien, pour les élèves, un registre d'exploration heuristique et servir également de support pour construire les textes de démonstration nécessaires à la validation géométrique des résultats obtenus.

III. Mesure d'une figure géométrique

Avec le dénombrement, la mesure des grandeurs a été une préoccupation importante en mathématiques, on trouve des passages relatifs à la mesure dans le Papyrus Rhind qui date du XVe siècle avant J.-C. Ce n'est pas l'objet de ce paragraphe que de traiter des questions que soulèvent la mesure en mathématique, rappelons néanmoins que la mesure d'une grandeur consiste à la comparer à une grandeur du même type qui a été choisie comme unité, c'est-à-dire de savoir combien de fois la grandeur à mesurer contient l'unité.

La mesure est directement liée aux nombres avec lesquels elle est effectuée, et il a fallu longtemps avant que l'évolution des mathématiques permette aux nombres d'être pensés indépendamment des concepts de grandeurs et de mesure. Tous les manuels de mathématiques de collège rappellent l'histoire de l'école pythagoricienne qui pensait que toute grandeur peut s'exprimer comme un nombre de fois l'unité, ce nombre étant une fraction d'entiers. Ils évoquent aussi le trouble qu'elle a rencontré lorsqu'elle a montré l'impossibilité de mesurer avec une fraction d'entiers la longueur de la diagonale d'un carré dont le côté est choisi comme unité.

La mesure en géométrie a aussi connu des développements important pour des raisons pratiques comme la mesure des grandeurs inaccessibles. La mesure de la pyramide Kheops par Thalès en est un exemple bien connu, on peut citer aussi la mesure de la Terre par Ératosthène ou le développement de la trigonométrie pour l'astronomie.

Dans ce paragraphe, nous allons nous contenter d'aborder, à travers l'étude de production d'élèves, quelques aspects de l'apprentissage des notions de périmètre et d'aire

qui forme une part importante de l'apprentissage des mesures dans l'enseignement primaire et secondaire.

1. Propriété d'additivité de la mesure

La mesure est additive, cela signifie que si deux ensembles A et B sont mesurables et que la mesure de leur partie commune (on dit aussi de leur intersection) est nulle, alors la mesure de leur réunion est égale à la somme de leur mesure.

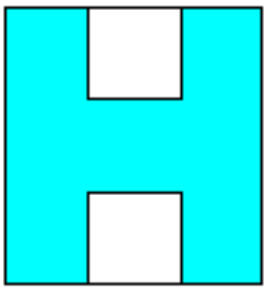
Cette propriété est utilisée pour évaluer l'aire ou le périmètre d'une figure, avec des adaptations éventuelles lorsque l'intersection des deux ensemble n'a pas une mesure nulle.

Exemple d'un calcul d'aire proposé à l'évaluation en 6e

Dans une plaque de 132 cm², on découpe la lettre « H » en enlevant deux carrés de 16 cm² chacun (carrés blancs).

Quelle est l'aire du « H » en cm² ? (Surface coloriée)

Réponse : L'aire du « H » est : …… cm²



Les élèves écrivent pour 60% d'entre eux la réponse attendue, 4% effectuent 132 – 16 et 6% ne répondent pas à cette question.

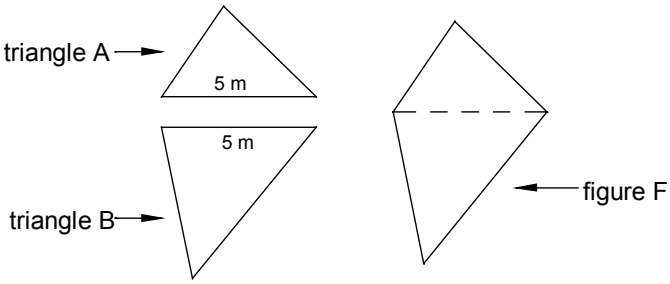
Exemple d'un calcul de périmètre proposé à l'évaluation en 6e

Le périmètre du triangle A est 12 m.

Le périmètre du triangle B est 17 m.

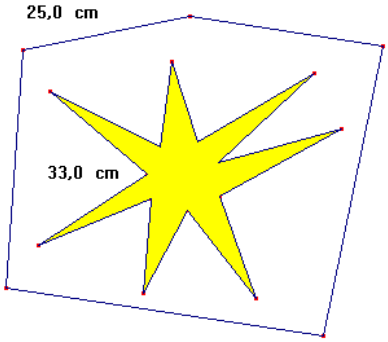
La figure F est formée à l'aide des deux triangles, comme indiqué sur le dessin.

Quel est le périmètre de la figure F ?



Cette question n'est réussie que par 20% des élèves à l'entrée en 6e, 5% d'entre eux répondent 24 m et 45% répondent 29 m tandis que 8% ne répondent pas. Manifestement, la réponse 24 s'obtient en ôtant 5 m à la somme des deux périmètres qui est de 29 m, et ce calcul explique la réponse erronée la plus fréquente. Ainsi, pour presque la moitié d'entre eux, les élèves appliquent la propriété d'additivité de la mesure, qu'il s'agisse de l'aire ou du périmètre des figures avec une certaine confusion sur les figures considérées. Le périmètre (malgré l'étymologie du terme) n'est pas une mesure des surfaces, les figures qu'on mesure par leur périmètre sont des lignes, et en tant que lignes, les deux triangles A et B ont une intersection qui n'est pas de mesure nulle.

Afin de mieux comprendre pourquoi le périmètre n'est pas une mesure des surfaces, il suffit de penser à une propriété que possède aussi la mesure et qui découle de l'additivité : si A et B sont deux ensembles mesurables tels que B comprenne A, alors la mesure de A est inférieure à la mesure de B. Cette propriété n'est pas vérifiée par le périmètre appliqué à des figures considérées comme des surfaces : il suffit pour le remarquer de penser à une figure très découpée à l'intérieure d'une figure convexe.

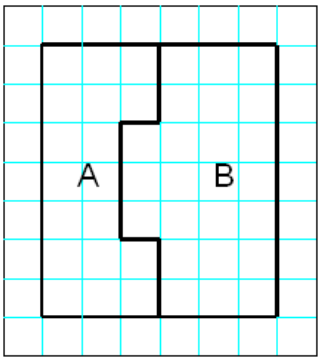


2. Confusion aire et périmètre d'une figure

La confusion qui vient d'être évoquée entre la figure en tant que ligne et la figure en tant que surface entraîne une confusion des mesures même de ces figures. C'est ce que montre les réponses aux questions suivantes, posées à l'entrée en 6e.

Un terrain a été partagé comme l'indique la figure .

Entoure la réponse qui convient et explique ton choix :



a.
- L'aire de la parcelle A est la plus grande
- Les deux parcelles ont la même aire
- L'aire de la parcelle B est la plus grande

b.
- Le périmètre de la parcelle A est le plus grand
- Les deux parcelles ont le même périmètre
- Le périmètre de la parcelle B est le plus grand

Les élèves trouvent que l'aire de la parcelle B est la plus grande pour 90% d'entre eux, néanmoins la réussite à la question n'est que de 60% environ car 30% des élèves justifient mal leur réponse, par exemple en expliquant que « *B fait trois carreaux de plus que A* ». Une telle explication ne révèle pas une mauvaise compréhension de l'aire. Les réponses à la question sur le périmètre montrent en revanche une assimilation chez beaucoup d'élève des deux mesures : seulement 30% d'entre eux répondent correctement et 45% affirment que le périmètre de la parcelle B est le plus grand.

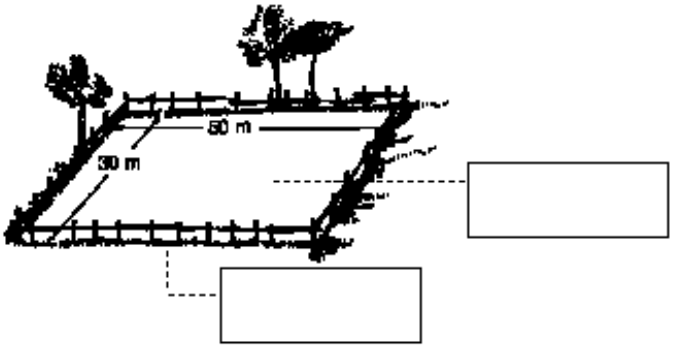
La confusion concerne-t-elle aussi des figures courantes comme le rectangle ? Les deux questions suivantes posées en fin de CM2 ou en début de 6e montrent que la distinction entre les deux notions ne résiste pas pour tous les élèves au contexte dans lequel les questions concernant l'aire ou le périmètre sont posées.

<u>Question n°1</u>

Un terrain rectangulaire a 50 m de longueur et 30 m de largeur.
Calcule son périmètre et son aire.

Regarde les cadres qui sont, l'un à droite, l'autre en dessous du dessin.

Inscris dans le cadre qui convient le mot PERIMETRE
ou le mot AIRE et le résultat correspondant.

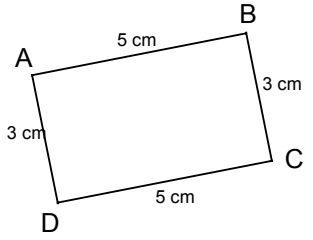


Cette première question a été posée à des élèves en fin de CM2. Malgré l'ambiguïté apparente de la question, 88% des élèves inscrivent le mot AIRE dans le cadre de droite, et 63% des élèves posent l'opération correcte pour le calcul de l'aire et 54% d'entre eux obtiennent le résultat 1500 m². Le mot PÉRIMÈTRE est écrit dans le cadre du bas par 90 % des élèves et 50% obtiennent 160 m.

Question n°2

Voici un rectangle ABCD.

L'aire du rectangle ABCD est : ..... cm².



La valeur de l'aire est donnée par 30% des élèves seulement et 35% d'entre eux répondent 16, c'est-à-dire la valeur du périmètre.

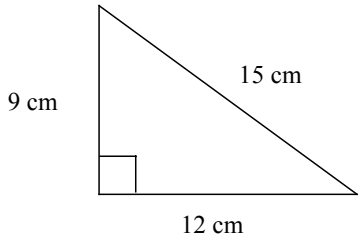
Sans doute le fait d'avoir indiqué les quatre dimensions du rectangle a-t-il perturbé les élèves qui, par effet de contrat, ont tenu à utiliser toutes les données numériques du problème. Malgré cette réserve quant aux conclusions que permettent de tirer les réponses obtenues, on retiendra une certaine fragilité des apprentissages.

3. Les formules d'aire et de périmètre

Les difficultés d'apprentissage des notions d'aire et de périmètre ont incité les concepteurs de programme et par conséquent les professeurs à limiter l'enseignement à la reconnaissance et à l'application de formules. Ainsi, quand la question du calcul de l'aire ou du périmètre d'une figure est posée, l'élève recherche la bonne formule à appliquer avec les valeurs fournies.

Analysons encore un exemple issu de l'évaluation nationale à l'entrée en 6e :

Quelle est l'aire de ce triangle ?



À cette question, les réponses erronées sont, dans l'ordre de leur fréquence décroissante : 108 cm² ; 42 cm² et 93 cm².

Attribuons de manière fictive, à trois élèves A, B et C ces trois réponses respectivement.

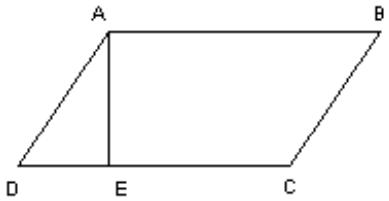
La formule de l'aire du triangle n'est pas induite par la disposition classique d'un triangle posé sur son plus long côté, en revanche la disposition du triangle rappelle celle du rectangle. Ainsi peut-on expliquer que l'élève A calcule l'aire du rectangle dont les côtés sont 9cm et 12cm, c'est-à-dire les côtés perpendiculaires du triangle rectangle. L'élève B calcule le périmètre de ce rectangle, peut-être en partie assimilable à un effet de contrat qui le conduit à utiliser toutes les données numériques. Pour le dernier élève, on remarque aussi l'utilisation des trois données numériques. L'élève C calcule ainsi l'aire du rectangle et retire, non pas la moitié du résultat trouvé mais 15 qui figure dans l'énoncé à la place du triangle dont il faut calculer l'aire.

Le recours aux formules semble une fois de plus facilement perturbé par le contexte dans lequel la question est posée. En outre, la reconnaissance de la formule à utiliser n'est pas suffisante à son application correcte. C'est ce que montre l'exemple ci-dessous, posé, lui aussi, à l'entrée en 6e.

La figure ABCD représente un parallélogramme.

Les mesures sont :

AB = DC = 6cm ; AD = BC = 4 cm ; AE = 3 cm



a. Entoure, dans le formulaire la formule qui te permettra de calculer l'aire de ABCD.

b. Calcule l'aire de ce parallélogramme.

Le formulaire n'a pas été reproduit ici, mais indiquons que la reconnaissance visuelle de la forme « parallélogramme » n'était pas indispensable pour trouver la bonne formule car le

nom de chaque quadrilatère du formulaire était indiqué. Le nombre de non-réponses, proche de 30%, montre le peu d'attrait pour cette question. Parmi les 70% des élèves qui répondent, certains se trompent car la bonne formule est identifiée par 60% des élèves interrogés. La valeur exacte (18) n'est obtenue que par 30% des élèves environ. Plus de 15% d'entre eux répondent 24 calculant le produit des côtés du parallélogramme, comme s'ils utilisaient la formule du rectangle, ainsi généralisée à d'autres quadrilatères. 5% des élèves calculent le périmètre du parallélogramme et répondent 20, et 35% des élèves obtiennent d'autres résultats. Il reste 15% des élèves qui ne répondent pas, et il est intéressant de noter que ce nombre est de moitié inférieur à celui des non-réponse à la question de la reconnaissance de la formule.

Devant ces difficultés d'apprentissage récurrentes, les auteurs des derniers programmes pour l'école primaire, ont supprimé l'enseignement des formules à ce niveau et ont recommandé aux professeurs d'insister davantage sur le sens des notions d'aire et de périmètre. Citons ce texte : « *Les concepts de périmètre et d'aire ne doivent pas se réduire pour l'élève à des nombres ou des formules associés à des figures. Il est nécessaire de mettre en place des activités qui permettent aux élèves de distinguer les deux notions.* »

Les traitements d'une figure en géométrie sont donc différents en fonction de la théorie géométrique sous-jacente au travail, et en fonction de l'objectif de ce travail. Dans l'enseignement primaire et secondaire français, comme l'explique très bien Aline Robert (2003), le niveau de conceptualisation de l'espace géométrique n'est pas suffisant pour que la théorie, les problèmes et les méthodes de résolution géométriques puissent se dispenser de figures. Le travail sur la figure y est donc indispensable.

Les nombreux exemples d'utilisation des figures qui ont été présentés illustrent la grande diversité de ce travail. Diversité qui conduit Raymond Duval (2005) à conclure que la manière même de voir une figure, dépend de l'activité du sujet par rapport à cette figure. Il propose ainsi un classement des utilisations des figures en fonction de l'activité géométrique et distingue pour cela quatre *manières de voir* une figure qu'il associe à quatre types d'activités :

- la manière de voir qualifiée de « *botaniste* » est centrée sur la forme de la figure. Il s'agit pour le sujet d'apprendre à reconnaître la figure. En réalité, cette activité n'a rien de géométrique car elle ne fait appel à aucune propriété de la figure ;
- la manière de voir qualifiée d' « *arpenteur* » est centrée sur les dimensions de la figure et des figures élémentaires qui la composent. Il s'agit pour le sujet de mesurer des longueurs avec une éventuelle mise en correspondance entre les longueurs réelles, sur un terrain par exemple, et les longueurs du dessin qui en est un plan ;
- la manière de voir qualifiée de « *constructeur* » est centrée sur les instruments qui permettent de réaliser la figure. Il s'agit pour le sujet de mettre en relation la perception visuelle des formes avec d'une part les propriétés géométriques à l'origine de ces formes, et avec d'autre part les instruments qui permettent de représenter ces propriétés et donc de construire ces formes ;
- la manière de voir qualifiée d' « *inventeur - bricoleur* » est centrée sur l'organisation des sous figures qui composent la figure. Il s'agit pour le sujet de produire des propriétés nouvelles ou des figures nouvelles fondées par une relation de nécessité entre les propriétés de la figure donnée et celles qui sont à produire.

E. Difficultés d'apprentissage de la géométrie : quelques exemples

Pour terminer cette introduction à la didactique de la géométrie, quelques difficultés d'apprentissage sont examinées et interprétées.

I. Des connaissances spatiales aux connaissances géométriques

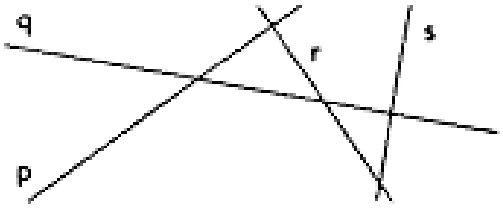
1. Difficultés liées aux connaissances spatiales

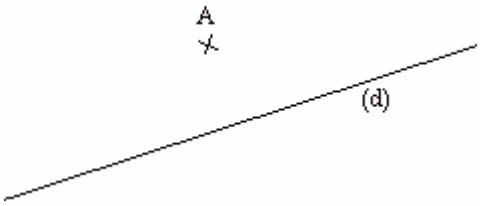
L'apprentissage de la géométrie par les jeunes enfants repose sur une structuration de l'espace qui dépend étroitement de ses connaissances spatiales. Ces connaissances se forment de manière progressive par l'intériorisation des actions effectives dans et sur l'environnement spatial du sujet. Certains auteurs attribuent des difficultés en géométrie, notamment en géométrie de l'espace, au fait que des élèves auraient vécu trop peu d'expériences relatives à l'espace (motricité, etc.) dans leur enfance, ou au fait que les enseignants proposent trop précocement de travailler sur des représentations et non sur des objets, ou sur des actions visualisées et non exécutées.

2. Difficultés liées à la particularité ou à la prégnance des images prototypes

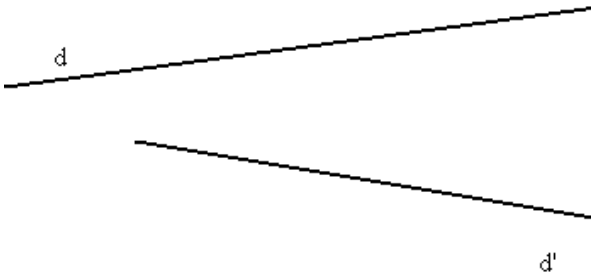
Comme nous l'avons déjà montré, les figures prototypes aident le travail géométrique, mais leur particularité peut être source de difficulté, par exemple pour reconnaître une figure géométrique. Un exemple bien connu est celui des droites perpendiculaires où les directions horizontale et verticale sont parfois tellement privilégiées que les élèves ne reconnaissent pas les perpendiculaires lorsqu'elles ne sont pas placées dans une autre configuration.

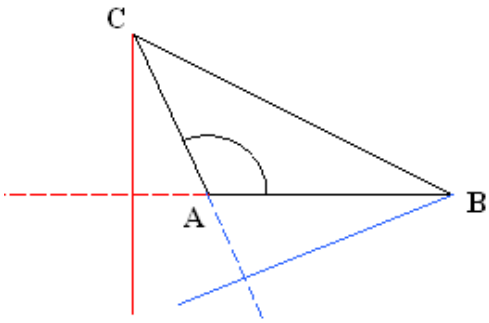
Ainsi, dans la figure de gauche, des élèves reconnaissent que les droites q et s sont perpendiculaires, mais pas que les droites p et r le sont ; dans la figure de gauche, s'ils doivent tracer la perpendiculaire à d passant par A, certains élèves tracent une « verticale » issue de A.



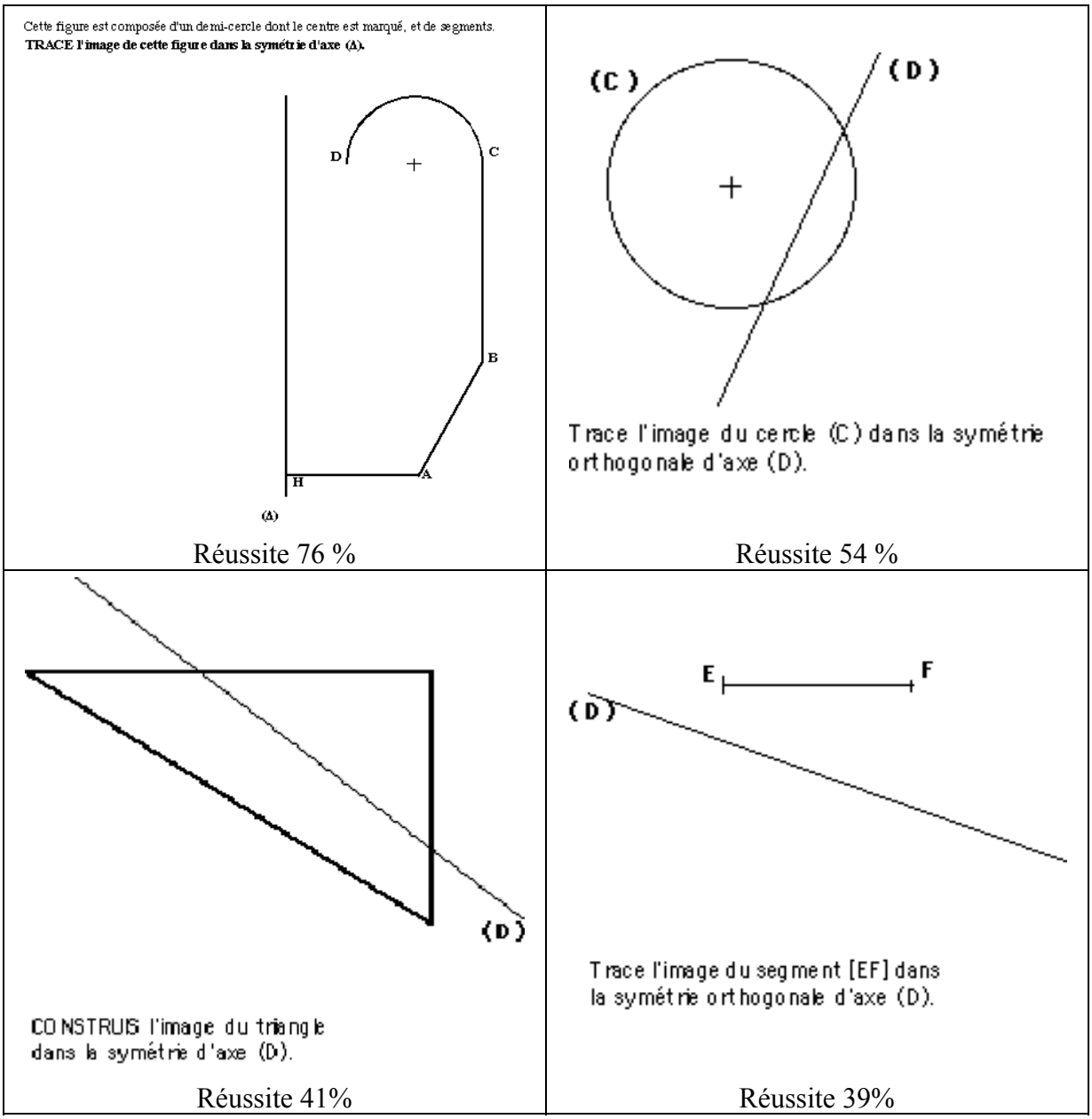


De la même manière, certains élèves n'identifient pas deux droites sécantes lorsque la figure est représentée comme sur le dessin de gauche ou peinent à tracer les hauteurs d'un triangle dont un angle est obtus car deux des hauteurs ne coupent pas les côtés « segments » mais les côtés « droites » et ils ne perçoivent pas le fait que « la hauteur coupe le côté perpendiculairement ».





Ces difficultés liées à la particularité des figures prototypes se cumulent parfois à un effet de prégnance : l'image prototype de la symétrie orthogonale est celle d'une image symétrique par rapport à un axe vertical où les parties de part et d'autre de l'axe sont considérées comme deux parties de la figure. Ainsi peut-on interpréter les différences de réussite aux trois questions suivantes proposées à l'entée en sixième en fonction de l'écart à la figure prototype précédemment décrite.

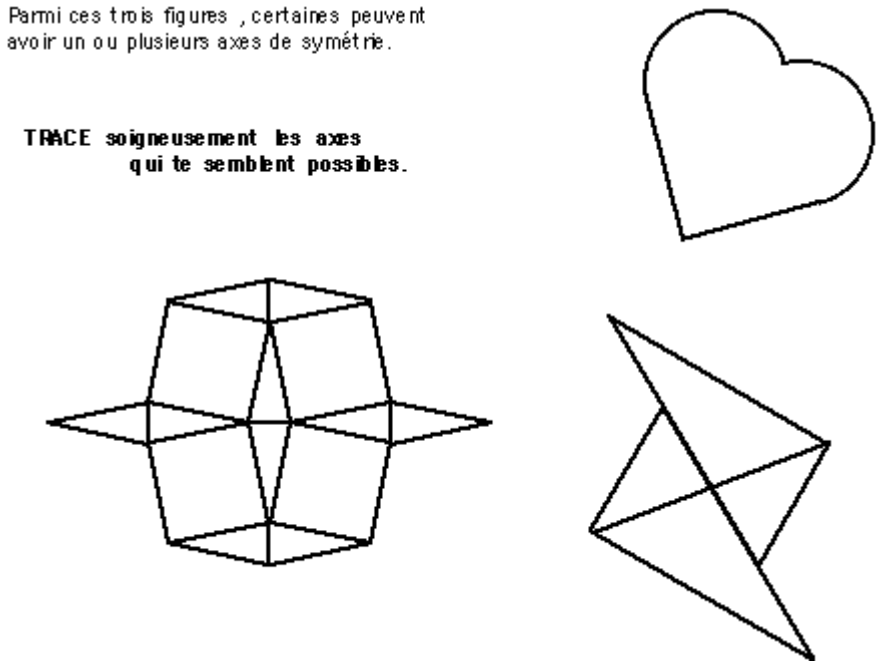


Le premier exercice est le mieux réussi, il correspond à une image prototype de la symétrie orthogonale, le deuxième et moins réussi que le premier : l'axe n'est plus vertical et la figure rencontre l'axe, le troisième est encore moins réussi car la figure comporte un côté vertical et un côté horizontal dont les symétriques ne sont ni horizontaux ni verticaux, il en est de même pour le dernier exercice où de nombreux élèves proposent un segment [E'F'] horizontal.

3. Difficultés liées aux conceptions construites à partir de l'expérience graphique

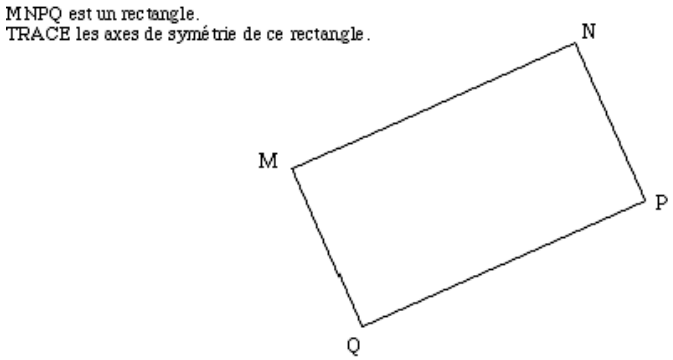
Les conceptions d'un objet mathématique sont des modélisations conçues par les chercheurs pour rendre compte des productions des élèves lorsqu'ils doivent résoudre des problèmes où cet objet mathématique intervient. Elles ne correspondent pas nécessairement en tout point à ce que pense un élève ou à la connaissance qu'il a construite, elles ne vont pas forcément à l'encontre des définitions possibles de l'objet mathématique en question.

Ainsi les chercheurs expliquent de nombreuses réponses à des questions sur la symétrie orthogonale par le fait que l'axe de symétrie d'une figure est souvent conçu par les élèves comme une droite qui partage la figure en deux parties superposables. Cette conception éclaire la réponse erronée la plus fréquemment donnée au dernier exercice du paragraphe précédent où les élèves proposent un segment [E'F'] horizontal tel que EFE'F' est un rectangle et tel que la droite (D) sépare ce rectangle en deux quadrilatères superposables. On retrouve cette conception comme source de réussite ou d'erreurs aux trois items de la question suivante posée en fin de 6e dans le cadre des évaluations mises en œuvre par l'APMEP.



L'axe du cœur est en effet correctement tracé par plus de 90% des élèves alors que seulement 65% d'entre eux réussissent les deux autres items : ceux qui échouent oublient l'axe horizontal de la figure de gauche ou tracent des droites qui ne sont pas des axes de symétrie.

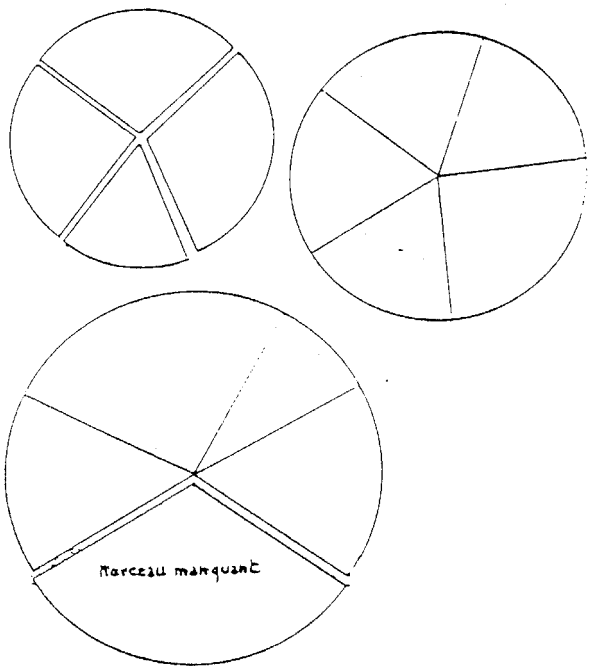
La question ci-contre a aussi été posée en fin de 6e. Les élèves qui tracent les médiatrices des côtés et les médiatrices seulement sont environ 60%. Un élève sur quatre (25%) trace au moins une des deux diagonales du rectangle



Les conceptions des élèves ne sont pas nécessairement erronées, elles se fondent sur les premières rencontres avec des objets dont les propriétés sont complexes et/ou multiples.

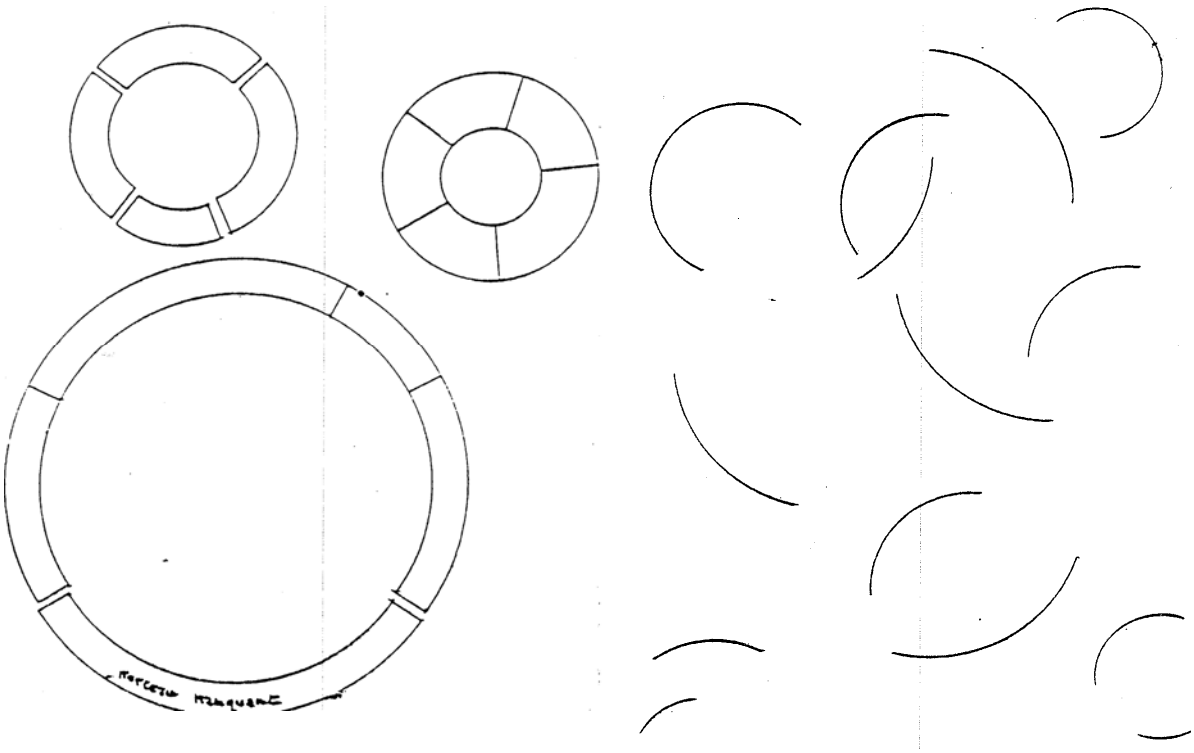
Une recherche a été menée par Michèle Artigue et Jacqueline Robinet (1982) sur les conceptions du cercle chez les enfants de l'école élémentaire. Le cercle est souvent enseigné par un travail de vocabulaire basé sur une ostension des objets géométriques qui s'y rapportent (cercle, arc, centre, diamètre, rayon, axe de symétrie), par le tracé de figures avec le compas et par le calcul de périmètre et d'aire à l'aide des formules (ce qui n'est plus au programme aujourd'hui).

Trois tâches ont été proposées à une cinquantaine d'élèves de CE2 et de CM1 dont la réalisation pouvait mettre en œuvre plusieurs définitions du cercle. Il s'agissait pour les chercheurs d'interpréter les productions des élèves pour savoir si certaines définitions étaient ou non privilégiées par les enfants, indépendamment des tâches proposées. Il s'agissait aussi, par des confrontations de méthodes entre les élèves, de favoriser l'apprentissage par certains élèves de propriétés du cercle par leur utilisation.



Dans la première tâche, les élèves recevaient des secteurs circulaires de trois disques de rayon différents, ils devaient recomposer les disques et construire un morceau manquant (voir ci-contre).

La deuxième et la troisième tâche étaient analogues, les secteurs circulaires étant respectivement remplacés par des secteurs de couronnes (voir ci-dessous à gauche) et des arcs de cercles (voir ci-dessous à droite). Dans la troisième tâche, les élèves ne pouvaient pas découper la feuille sur laquelle les arcs de cercle étaient dessinés.



La réalisation des tâches peut reposer sur trois caractérisations du cercle :

1) le cercle est une figure invariante par toute rotation autour d'un point fixe appelé centre ;
2) le cercle est une ligne fermée à courbure constante ;
3) le cercle est l'ensemble des points situés à une distance donnée d'un point fixe appelé centre ;

3bis) le cercle est la trajectoire d'un point mobile rigidement lié à un point fixe.

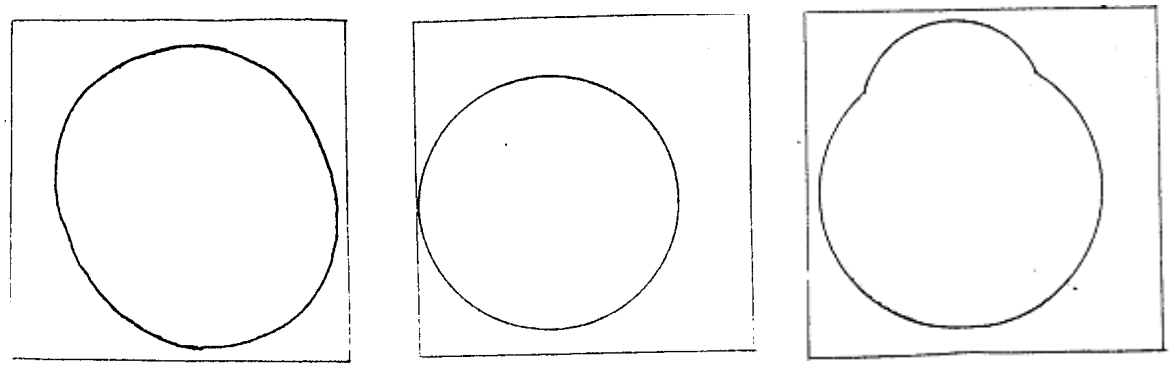
La première tâche favorisant plutôt la caractérisation 1), la deuxième et la troisième tâches favorisant plutôt la caractérisation 2). Les chercheurs pensaient aussi que les troisièmes caractérisations étant les plus connues, elles pourraient être mobilisées par les élèves pour toutes les tâches, mais de plus en plus difficilement car le centre est de plus en plus difficile à déterminer.

L'analyse du travail des élèves a montré qu'une autre caractérisation du cercle était mobilisée :

4) le cercle est une figure ayant même « mesure » dans toutes les directions du plan.

Cette caractérisation étant utilisée souvent de manière parcellaire : deux directions étant privilégiées, l'horizontale et la verticale. L'analyse du travail des élèves a aussi montré que le cercle est plutôt perçu par les élèves comme une ligne que comme un ensemble de points, et que le passage d'une conception à l'autre est très difficile. Pour compléter le secteur circulaire par exemple, les enfants qui voulaient prolonger la ligne opéraient par rotation ou glissement et superposition partielles des arcs connus mais ils n'utilisaient pas des points « repères » construits à partir du centre et du rayon connus et par lesquels passeraient les lignes. De même ceux qui voulaient placer tous les points situés à la même distance que les autres du centre donné, marquaient une dizaine de points, déclaraient ensuite que ce n'est pas possible de tous les tracer et finissaient par tracer l'arc de cercle manquant à main levée. Ces constats montrent qu'il y a là une difficulté de nature épistémologique, c'est-à-dire liée à la connaissance elle-même : concevoir un cercle, une droite ou un segment comme un ensemble infini de points, fait intervenir des notions difficiles comme celles d'infini, d'infiniment petit (il y a une infinité de points infiniment petits dans un segment) et de continuité.

Comme suite à ces trois activités, une évaluation a été proposée à 36 des élèves. Dans la première question, il s'agissait pour trois lignes fermées de dire si ces lignes étaient des cercles ou non, et d'argumenter la réponse donnée (voir les trois figures ci-dessous).



Les chercheurs ont constaté que les élèves se dégagent très difficilement des procédures « à l'œil nu » même quand ils constatent leur échec : 30% des élèves commencent par affirmer que la première figure est un rond puis, deux sur trois d'entre eux environ terminent en disant que ce rond n'est pas un cercle, mais les arguments restent visuels ; « ce n'est pas bien rond » ou « c'est bien rond » sont des arguments utilisés par 60% des élèves.

La deuxième question portait sur les symétries des trois figures proposées, elle montre que la direction horizontale et la direction verticale sont privilégiées comme axe de symétrie du cercle : 80% des élèves citent ces deux axes et parmi ceux-là, un sur trois affirme qu'il n'y a pas d'autre axe de symétrie, et un sur trois répond que tout diamètre est un axe de symétrie.

Dans une autre question, les élèves devaient déterminer le centre du cercle, en tracer des diamètres et des rayons et en donner leur mesure. Encore une fois, 80% des élèves se réfèrent aux directions horizontale et verticale pour effectuer des pliages et obtenir le centre. Près de trois élèves sur quatre connaissent bien les définitions du diamètre et du rayon mais 15% pensent que tous les diamètres n'ont pas la même mesure et 15% ne sont pas gênés par des mesures telles que le diamètre ne soit pas le double du rayon.

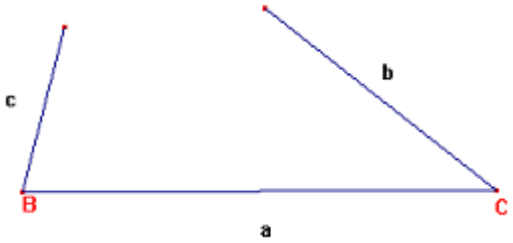
La dernière question était difficile à ce niveau : on donnait un point A et un point B distant de 8 cm et les élèves devaient construire un point M situé à 6 cm de A et à 5 cm de B. Seulement 20% des élèves réussissent à trouver un tel point M et un seul élève utilise le compas pour construire M.

Les chercheurs terminent leur rapport par un rappel des conceptions du cercle qui permettent d'interpréter les productions des élèves et par une mise en garde qui semble se généraliser assez bien à d'autres objets mathématiques : il est difficile de proposer des conceptions dans l'absolu, les conceptions semblent fortement liées aux types de tâches qu'elles permettent de résoudre.

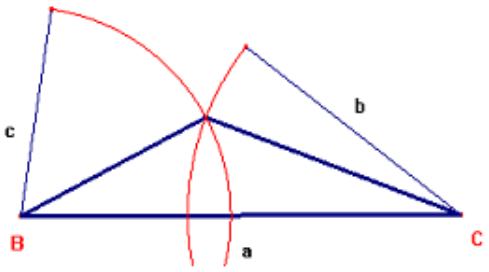
4. Difficulté pour trancher entre la perception et les propriétés géométriques

Il vient d'être montré que le passage de la perception des figures à leurs propriétés géométrique est difficile. Une autre difficulté est rencontrée par les élèves lorsque le dessin d'une figure en contredit ses propriétés. Si la problématique de travail des élèves est pratique, la perception du dessin prend une valeur telle que certains d'entre eux n'arrivent pas à mettre en cause ce qui est perçu pour rechercher des explications raisonnées des phénomènes.

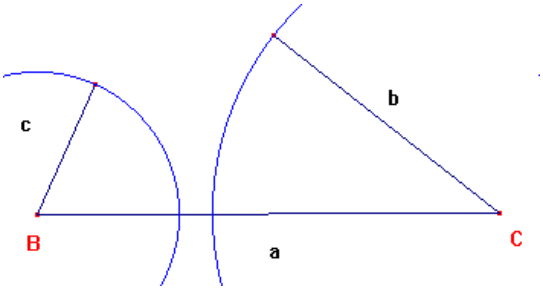
Un exemple très connu est celui du critère pour qu'on puisse construire un triangle lorsque les longueurs des trois côtés sont données. Il y a en définitive trois cas à distinguer suivant que le plus grand côté (au sens large) est supérieur, inférieur ou égal à la somme des deux autres. En notant a, b et c les longueurs des trois côtés on obtient les cas suivants.



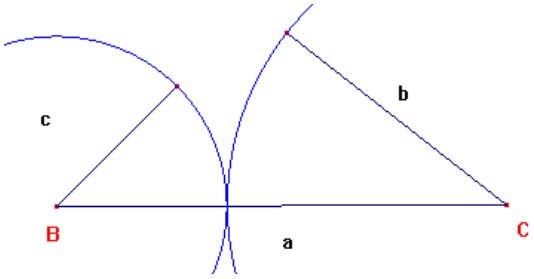
Le triangle est-il constructible ?



Oui si a < b + c



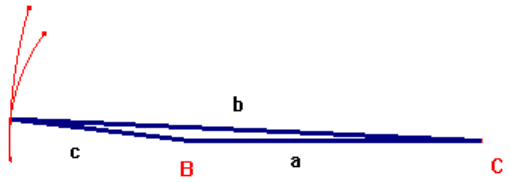
Non si a > b + c



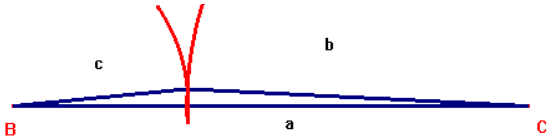
Si a = b + c, alors le triangle est plat

Une recherche menée par Annie Berté (1995-1996) a montré que le cas limite de l'inégalité triangulaire (a = b + c) est difficile à appréhender par de nombreux élèves avec seulement un travail graphique. Ils pensent en effet qu'il existe un voire une infinité de triangles dont les côtés mesurent 4 cm, 5 cm et 9 cm.

Les élèves qui commencent par tracer le côté de longueur 4 cm ou 5 cm réussissent souvent à construire un triangle très aplati, mais pas complètement plat qui est validé par la mesure des côtés avec la règle graduée.



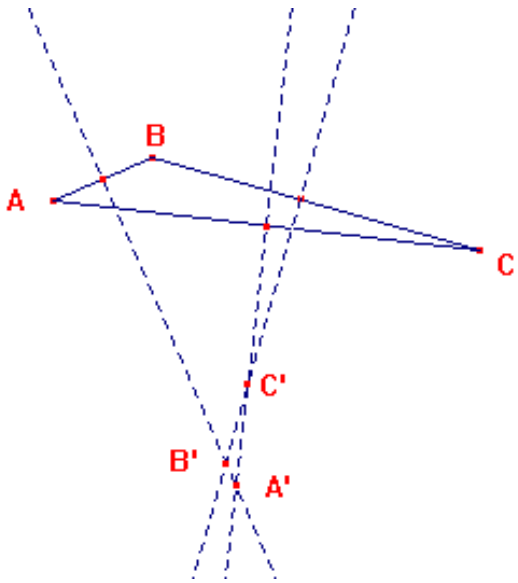
Ceux qui commencent par le côté de 9 cm sont nombreux à conclure à l'impossibilité de la construction ou à une infinité de triangles solutions. Certains, fondant leurs arguments sur le dessin obtenu, en viennent à penser que deux cercles peuvent avoir plus de deux points en commun.



Ainsi, Annie Berté montre que les professeurs qui enseignent l'inégalité triangulaire par expérimentation sur la feuille de papier, rencontrent systématiquement des élèves réfractaires qui persistent à dire que le triangle dont un côté est égal à la somme des deux autres (comme 4, 5, 9) existe et arrivent parfois même à convaincre toute la classe. Ce qui gêne le professeur pour intervenir, c'est que la validation de l'existence du triangle lorsque l'inégalité stricte est réalisée s'est justement appuyée sur l'expérience réalisée sur la feuille de papier, et c'est précisément le recours à une telle expérience qu'il faudrait maintenant contredire…

Il y a ici un malentendu entre le professeur et bon nombre d'élèves : lorsque le professeur enseigne la géométrie, c'est-à-dire cherche à faire que ses élèves construisent des connaissances de l'espace géométrique, et qu'il appuie son enseignement sur une interaction entre l'espace graphique de la feuille de papier et l'espace géométrique du modèle et des propriétés théoriques, ce professeur ne prend jamais le dessin de l'espace graphique comme espace de travail, et cela contrairement à de nombreux élèves. Le professeur qui se réfère au modèle, ne peut pas, contrairement à ses élèves, « voir » un triangle non aplati dont un côté est égal à la somme des deux autres : le professeur et les élèves ne voient pas la même chose lorsqu'ils regardent le même dessin !

Comment faire en sorte alors que les élèves comprennent la nécessité de mettre en œuvre des nouvelles règle de travail : construire des propositions logiquement articulées en référence à des propriétés plutôt que de valider ces propositions par des informations tirées de représentations de la figure ?



Guy Brousseau (1983) a proposé à des élèves de construire les médiatrices d'un triangle ABC assez grand dont un angle est obtus et mesure plus de 150°. La difficulté d'effectuer précisément ces tracés conduit systématiquement à un triangle A'B'C' très petit, mais pas suffisamment pour que les

élèves pensent que les trois médiatrices sont concourantes. La demande du professeur est de modifier le triangle ABC pour agrandir le triangle A'B'C'. Les essais successifs échouent évidemment, ce qui est contraire à l'attente des élèves, et ce qui les conduit à chercher des raisons expliquant ce phénomène aussi irritant qu'incompréhensible.

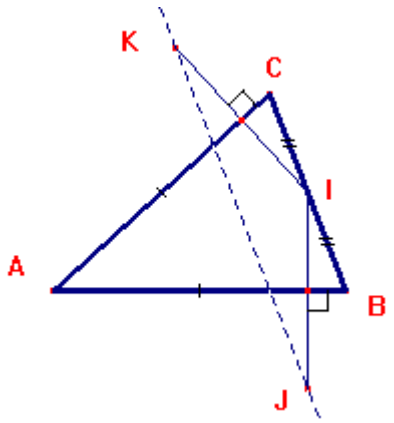
La question du « pourquoi » se trouve alors posée, elle conduit les élèves à chercher une autre compréhension de la figure : les médiatrices ne sont plus perçues comme des droites perpendiculaires aux côtés et passant par leur milieu, la caractérisation par les points équidistants est introduite dans le corpus d'arguments. Cela conduit à établir le concours des trois médiatrices, et donc à expliquer l'impossibilité d'agrandissement : les points A', B' et C' sont nécessairement proches sur le dessin car s'il était parfait, ces trois points seraient confondus. La problématique spatio-géométrique est ainsi invalidée par la nécessité d'expliquer des phénomènes qui se passent dans l'espace graphique.

II. La démonstration en géométrie, des difficultés spécifiques

Une source importante de difficultés n'est pas spécifique à la géométrie, mais c'est souvent dans ce domaine des mathématiques que les élèves la rencontrent pour la première fois, il s'agit de la démonstration. D'une manière qui pourrait sembler caricaturale, Évelyne Barbin (1993) écrit que la place accordée à la démonstration dans l'enseignement français est très importante, que pour de nombreux professeurs elle constitue l'entrée dans le monde des mathématiques, et que pour de nombreux élèves elle marque le début de leur échec dans la discipline…

Les recherches ont donc été nombreuses pour comprendre l'évolution de la forme et de l'importance accordée à la démonstration dans l'histoire des mathématiques, pour en comprendre l'apprentissage par les élèves et en améliorer l'enseignement. Il serait trop ambitieux pour ce cours de développer tous ces aspects, néanmoins, pour aborder les difficultés spécifiques que pose l'apprentissage de la démonstration en mathématique, l'analyse d'un exemple sera développé qui montrera, en référence aux travaux de Raymond Duval (1993) que la démonstration se distingue d'autres discours de preuve, et que certaines confusions expliquent de nombreuses erreurs dans les productions des élèves.

Voici cet exemple : soit un triangle ABC isocèle en A, I le milieu de [BC], J le symétrique de I par rapport à (AB), et K le symétrique de I par rapport à (AC). La proposition qui va être justifiée est le parallélisme des droites (JK) et (BC).



Nous ne reviendrons pas sur la difficulté déjà analysée du passage d'une géométrie d'observation à une géométrie de déduction : certains élèves justifient le parallélisme en affirmant que les droites ne se coupent pas, même si on prolonge le segment [BC]. On retrouve aussi dans cet argument la difficulté à dissocié la représentation d'un objet et l'objet lui-même.

1. Les raisons dans les démarches de justification

La recherche des raisons correspond à une fonction très générale qui est de répondre à la question « pourquoi ? » : pourquoi quelqu'un affirme-t-il que les droites sont parallèles ? ou bien pourquoi ces droites sont-elles parallèles ? Si le parallélisme est affirmé par un élève lors d'un travail de groupe, cet élève devra produire au moins une raison qui sera discutée par le groupe ; si l'affirmation est celle du professeur, il est vraisemblable qu'elle ne sera pas

mise en doute et qu'elle produira un travail pour répondre à la question pourquoi ces droites sont-elles parallèles ? Il s'agira alors de produire des raisons suffisantes pour justifier l'affirmation. Le travail de production des raisons n'est jamais explicité dans un texte mathématique ; dans ce travail le sujet effectue des allers et retours entre l'affirmation et des raisons qui pourraient conduire à justifier, soit directement le parallélisme, soit au moins des arguments qui pourraient être utilisés pour le justifier. Certains auteurs avancent que la recherche de raisons est une activité qui s'apprend, et ils en préconisent un enseignement (enseignement de méthodes) pour en faciliter l'apprentissage. D'autres auteurs avancent que la rédaction des raisons produites est une activité qui s'apprend, et ils en préconisent un enseignement qui repose sur une tâche nouvelle, la narration de recherche, où l'élève décrit sa recherche dans son langage, mais avec l'envie d'être compris ce qui le pousse à préciser son niveau d'évidence.

Pour justifier une affirmation, produire des raisons ne suffit pas, il faut encore qu'elles soient reconnues comme valables pour étayer l'affirmation. La valeur d'un argument dépend de sa pertinence et de sa force (cf. Duval). Un argument est pertinent s'il est en rapport avec l'affirmation à justifier, dans le cas contraire, il est « hors-sujet ». La pertinence est donc en rapport avec la sémantique. La force d'un argument dépend du fait qu'il résiste à une argumentation contraire, mais aussi de sa valeur au regard de celui à qui l'argument s'adresse.

Pour que les élèves apprennent à produire des raisons et à les critiquer, des professeurs proposent des situations spécifiques de travail en petit groupe par exemple. De telles situations favorisent aussi le passage d'une géométrie d'observation à une géométrie du raisonnement. Dans ce passage, certains élèves ne quittent pas toujours complètement la référence à ce qu'ils observent. Ainsi élaborent-ils des justifications comprenant à la fois des arguments en référence à des définitions ou à des propriétés des objets géométriques, et des arguments tirés du dessin dont ils disposent. Examinons trois exemples de justifications qui pourraient être produits par des élèves de collège.

- Première justification : « *La perpendiculaire à (BC) en B coupe (IJ) en un point B' tel que BB' = 3 cm et la perpendiculaire à (BC) en C coupe (JK) en un point C' tel que CC' = 3 cm. Comme BB' = CC' on en déduit que (JK) et (BC) sont parallèles.* »

Les arguments sont pertinents en géométrie naturelle. Les arguments sont forts car la mesure peut se contrôler et le recours à l'égalité pour conclure est une référence à une propriété des parallèles qui est utilisée pour en construire (et cela dès l'école élémentaire). Un argument de généralité peut être opposé à cette justification : un autre élève aura sûrement obtenu un dessin sur lequel les longueurs BB' et CC' ne sont pas égales à 3 cm, l'argument des 3 cm a donc une faiblesse : son manque de généralité. En géométrie axiomatique naturelle, la mesure des longueurs n'est pas pertinente car aucune indication de longueur n'était donnée pour décrire la figure.

- Deuxième justification : « *J'ai tracé une droite (d) perpendiculaire à (BC), cette droite est aussi perpendiculaire à (JK) donc les deux droites (BC) et (JK) sont parallèles car deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles* ».

Malgré la forme adoptée « j'ai tracé une droite (d)… » qui devrait être remplacée par « Soit (d) une droite… » les arguments proposés sont pertinents en géométrie axiomatique naturelle. La justification y est néanmoins lacunaire car la perpendicularité des droites (d) et (JK) n'est pas établie, si cette étape était réalisée, le recours à la propriété des droites suffirait à justifier le parallélisme, comme indiqué par l'élève. L'omission de l'étape décisive montre que l'élève constate la perpendicularité des droites (d) et (JK), sans doute en faisant confiance

à se perception ou en l'étayant d'une vérification à l'équerre. Le fait que la référence à l'équerre n'apparaisse pas, peut aussi être un effet de l'enseignement : le professeur, pour aider ses élèves à abandonner la géométrie d'observation a pu interdire la référence aux instruments de géométrie dans les discours de justifications.

- Troisième justification : « *la droite (JK) est parallèle à la droite (BC) parce qu'en déplaçant la figure de manière à ce que la droite (BC) soit horizontale, la droite (JK) devient, elle aussi horizontale.* »

Les arguments ne sont pas pertinents dans la géométrie axiomatique naturelle car la notion d'horizontale comme celle de verticale en sont totalement absentes. Dans une géométrie naturelle où les directions horizontale et verticale sont utilisées, les arguments proposés sont en revanche pertinents car ils traitent bien du parallélisme. La valeur de l'argument est forte car il s'appuie implicitement sur l'image prototype des parallèles, composée de deux droites horizontales, ou parallèles au bord de la feuille de papier sur laquelle sont représentées ces droites. En revanche l'argument proposé résiste mal à la contradiction car il ne dit rien des moyens mis en œuvre pour affirmer que la droite (JK) devient bien, elle aussi, horizontale.

Les exemples étudiés montrent que les raisons produites pour justifier doivent être à la fois pertinentes et fortes, mais encore qu'elles doivent être suffisantes. Remarquons que ces justifications proposent une articulation des raisons, mais que bien souvent, au démarrage de l'apprentissage de la démonstration, les élèves s'en tiennent à la seule production de raisons qu'ils énumèrent sans les articuler, ignorant souvent les arguments contraires qui pourraient leur être opposés. Il faut dire que dans les situations de communication ordinaire, le nombre de raison renforce la justification. Il faut dire aussi que la production de raisons est une activité importante par elle-même, et qu'au moment de cette production, il peut être trop coûteux pour l'élève d'en examiner l'acceptabilité.

2. Explication et raisonnement : quelles fonctions ?

Parmi les justifications, Raymond Duval distingue les explications des raisonnements par leur fonction. La fonction d'une explication est de rendre compréhensible une donnée c'est-à-dire un phénomène, un résultat, un comportement, etc. Pour y parvenir, l'explication donne une ou des raisons qui sont en réalité bien souvent seulement des descriptions. Un exemple classique encore utilisé dans l'enseignement pour expliquer la règle des signes du produit de deux nombres relatifs est le modèle des amis et des ennemis : le signe plus est associé aux amis et le signe moins au ennemis, il s'ensuit que le produit de deux nombres de même signe est positif car les amis de mes amis, comme les ennemis de mes ennemis, sont mes amis ; il s'ensuit également que le produit de deux nombres de signes contraires. Cette explication permet de comprendre la règle des signes, mais ni d'établir sa validité, ni de comprendre pourquoi elle est valide.

On peut sans doute interpréter les productions de certains élèves comme le résultat d'une confusion entre la démonstration qui est attendue par le professeur et les explications qui sont généralement données dans la vie courante, y compris en cours de mathématiques comme le montre l'exemple de la règle des signes ! Ainsi, dans la troisième justification, peut-on penser que l'élève qui doit montrer le parallélisme des droites (JK) et (BC) décrit ce parallélisme de la même manière qu'il pourrait le faire pour toutes les droites parallèles : il déplace mentalement ces droites en position horizontale.

Les raisonnements, comme les explications, produisent des raisons, mais ces raisons n'ont pas pour fonction de rendre compréhensible une donnée, elles ont pour fonction de faire changer la valeur de vérité de cette donnée pour celui à laquelle elle s'adresse : de la faire

passer d'une proposition de laquelle il peut douter à une proposition qu'il tiendra pour vraie lorsque certaines conditions sont remplies.

Examinons par exemple la justification suivante :

- Quatrième justification : « *les droites (JK) et (BC) ne peuvent pas être sécantes parce la figure est symétrique par rapport à la droite (AI). La droite (BC) parce que le triangle ABC est isocèle en A, et la droite (JK) parce que les points J et K ont été obtenus par symétrie par rapport aux côtés (AB) et (AC) qui sont eux-mêmes symétriques par rapport à la droite (AI). Alors si la droite (JK) coupait (BC) d'un côté de la droite (AI) il faudrait quelle la coupe aussi de l'autre côté.* »

La justification proposée est riche en arguments tous pertinents en géométrie axiomatique naturelle. L'argument majeur de cette explication tient du raisonnement : les droites (JK) et (BC) sont parallèles parce qu'elles ne sont pas sécantes, de manière implicite cet argument se réfère à une définition des droites parallèles du plan (à noter qu'une telle définition n'est pas valide dans l'espace où des droites peuvent n'avoir aucun point commun et n'être pourtant pas parallèles, il suffit de penser à des arêtes orthogonales du cube pour s'en convaincre). La justification utilisée pour établir que les droites ne sont pas sécantes, tient, elle aussi, du raisonnement même si une partie est implicite : si les droites avaient un point commun alors elles en auraient deux, or deux droites ayant deux points communs sont des droites confondues donc parallèles. Cette justification comporte aussi une partie pour assurer que la droite (JK) est symétrique par rapport à la droite (AI). Les raisons apportées dans cette partie du texte réfèrent à une conception classique de la symétrie orthogonale : l'axe de symétrie partage la figure en deux parties identiques de part et d'autre de l'axe. La référence à cette conception est convaincante, elle vise bien la valeur de vérité de l'affirmation.

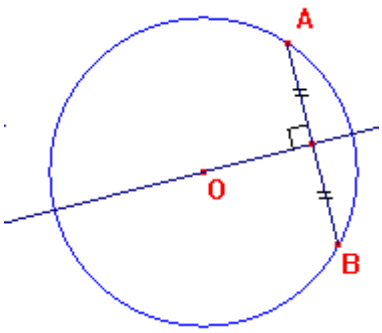
Tout professeur de mathématiques sera d'accord pour distinguer ce raisonnement convaincant d'une démonstration, le paragraphe suivant en propose une explication.

3. Démonstration et argumentation : quels fonctionnements ?

Pour qu'un raisonnement puisse être une démonstration, il doit être valide. Établir un raisonnement valide suppose de respecter des contraintes : celles de la déduction qui est elle-même soumise aux règles de la logique.

Le raisonnement déductif est composé d'étapes appelées pas de déduction. Voici un exemple de pas de déduction qui illustre le fonctionnement général de tout pas de déduction.

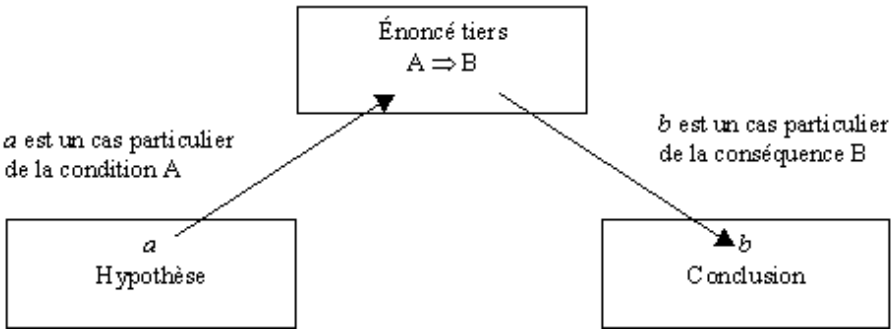
Considérons un cercle de centre O et de rayon R ainsi que deux points A et B de ce cercle, le pas de déduction qui va être analysé est celui qui permet d'affirmer que le point O appartient à la médiatrice du segment [AB]. Après avoir établi que OA = OB = R, il vient le pas suivant :



O est équidistant de A et de B, or tout point équidistant des extrémités d'un segment appartient à la médiatrice de ce segment, donc O appartient à la médiatrice du segment [AB]. Il y a un théorème de la géométrie qui est cité :

tout point équidistant des extrémités d'un segment appartient à la médiatrice de ce segment. Ce théorème est un énoncé tiers qui fonde le pas déductif. Ce théorème est composé de deux propositions « tout point équidistant des extrémités d'un segment » qui est la condition, et « appartient à la médiatrice de ce segment » qui est la conséquence. Comme les y invitent les instructions officielles, les professeurs, pour faciliter l'identification de la condition et de la conséquence rédigent généralement les théorèmes en utilisant « si » et « alors » : si un point

est équidistant des extrémités d'un segment, alors ce point appartient à la médiatrice de ce segment. La proposition « O est équidistant de A et de B » est un cas particulier de la condition générale du théorème « un point est équidistant des deux extrémités d'un segment », on l'appelle l'hypothèse, et de même la proposition « O appartient à la médiatrice de [AB] » est un cas particulier de la conséquence générale du théorème « ce point appartient à la médiatrice de ce segment », on l'appelle la conclusion. Ainsi, un pas de déduction peut se schématiser ainsi :



Autrement dit, le fonctionnement d'un pas de déduction est le suivant : dans une théorie, une proposition *a* entraîne une proposition *b* s'il existe un théorème de la théorie d'après lequel A implique B et pour lequel *a* est un cas particulier de A et *b* est le cas particulier de B correspondant.

Il est important de remarquer que l'hypothèse ne peut être que donnée au départ ou établie, c'est-à-dire obtenue comme conclusion dans un pas de déduction antérieur, et que l'énoncé tiers fait partie d'un corpus déterminé de définitions et de théorèmes déjà construits théoriquement. Il est important de remarquer aussi que ce fonctionnement d'un pas de déduction est fondé par le statut des propositions mises en jeu et non par leur contenu. Peu importe que le destinataire soit convaincu de la valeur de vérité de l'énoncé tiers pourvu qu'il l'admette et qu'il reconnaisse que l'hypothèse est un cas particulier de sa condition ! C'est principalement ce qui distingue les démonstrations des autres raisonnements que Duval qualifie d'argumentation : dans une argumentation dit-il, la valeur de certitude attachée aux propositions prises comme énoncé tiers, est directement liée au contenu de ces propositions. Et cette valeur peut varier d'un individu à un autre ou se modifier avec un changement de l'état des connaissances du sujet. L'organisation d'une démonstration fait, au contraire, abstraction de la valeur liée à la compréhension spontanée des propositions pour se centrer exclusivement sur la valeur dérivée du statut théorique de chaque proposition.

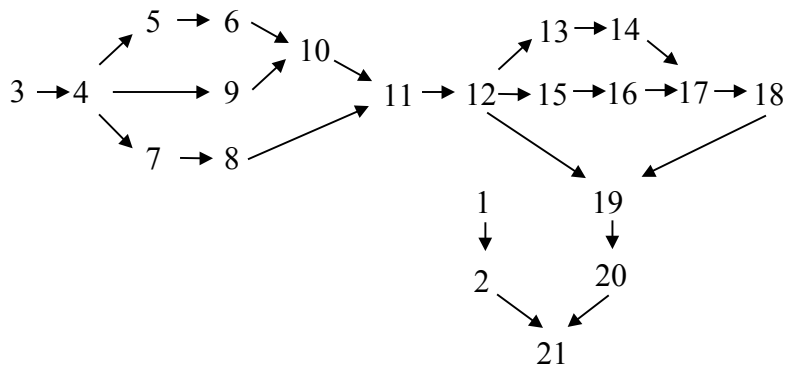
Une démonstration est généralement composée de plusieurs pas de déduction qui constituent le plus souvent une organisation qui n'est pas linéaire, mais qui prend une forme d'arbre dès que la condition d'un énoncé tiers est multiple. Voici par exemple une démonstration du parallélisme des droites (BC) et (JK) et l'arbre correspondant.

On suppose que les points A, B et C ne sont pas alignés, ainsi A, B, C et I sont distincts deux à deux. On note respectivement J' et K' le projeté orthogonal de I sur (BC) et sur (AC).

1. ABC est isocèle en A et (AI) est la médiane issue de A, or la médiane d'un triangle isocèle est la médiatrice de sa base, donc (AI) est la médiatrice du segment [BC].
2. (AI) est la médiatrice du segment [BC], or la médiatrice d'un segment coupe perpendiculairement en son milieu, donc les droites (AI) et (BC) sont perpendiculaires.

3. ABC est isocèle en A et (AI) est la médiane issue de A, or la médiane d'un triangle isocèle est la bissectrice de l'angle au sommet principal, donc (AI) est bissectrice de l'angle en A.
4. I appartient à la bissectrice de l'angle en A, or tout point de la bissectrice d'un angle est équidistant des deux côtés de l'angle, donc IJ' = IK'.
5. J est le symétrique de I par rapport à (AB), or le milieu de deux points symétriques appartient à l'axe de la symétrie orthogonale, donc J' est le milieu de [IJ].
6. J' est le milieu de [IJ], or le milieu d'un segment partage ce segment en deux segments de même longueur égale à la moitié de la longueur du segment initial, donc IJ = 2.IJ'.
7. K est le symétrique de I par rapport à (AC), or le milieu de deux points symétriques appartient à l'axe de la symétrie orthogonale, donc K' est le milieu de [IK].
8. K' est le milieu de [IK], or le milieu d'un segment partage ce segment en deux segments de même longueur égale à la moitié de la longueur du segment initial, donc IK = 2.IK'.
9. IJ' = IK', or une égalité n'est pas modifiée si l'on multiplie ses membres par le même facteur non nul, donc 2.IJ' = 2.IK'
10. IJ = 2.IJ' et 2.IJ'=2.IK', l'égalité est transitive, donc IJ = 2.IK'
11. IJ = 2.IK' et IK = 2.IK', l'égalité est transitive, donc IJ = IK.
12. IJ = IK, or tout point équidistant des extrémités d'un segment appartient à la médiatrice de ce segment, donc I appartient à la médiatrice du segment [JK].
13. A appartient à l'axe de la symétrie orthogonale d'axe (AB), or tout point de l'axe d'une symétrie orthogonale est invariant par cette symétrie, donc le symétrique de A par la symétrie d'axe (AB) est A lui-même.
14. Les segments [AI] et [AJ] sont symétriques par rapport à (AB), or deux segments symétriques ont la même longueur, donc AI = AJ.
15. A appartient à l'axe de la symétrie orthogonale d'axe (AC), or tout point de l'axe d'une symétrie orthogonale est invariant par cette symétrie, donc le symétrique de A par la symétrie d'axe (AC) est A lui-même.
16. Les segments [AI] et [AK] sont symétriques par rapport à (AC), or deux segments symétriques ont la même longueur, donc AI = AK.
17. AI = AJ et AI = AK, l'égalité est transitive, donc AJ = AK.
18. AJ = AK, or tout point équidistant des extrémités d'un segment appartient à la médiatrice de ce segment, donc A appartient à la médiatrice du segment [JK].
19. A et I sont deux points distincts de la médiatrice du segment [JK], or par deux points distincts donnés il passe une et une seule droite, donc (AI) est la médiatrice du segment [JK].
20. (AI) est la médiatrice du segment [JK], or la médiatrice d'un segment coupe perpendiculairement en son milieu, donc les droites (AI) et (JK) sont perpendiculaires.
21. (JK) et (BC) sont perpendiculaires à (AI), or deux perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles, donc (JK) // (BC).

Cette démonstration articule 21 pas déductifs dont la validation de l'hypothèse à été passée chaque fois sous silence. La complexité du texte tient à l'organisation des pas déductifs illustrée par le graphique suivant.



Le texte ainsi construit est très éloigné d'un texte d'argumentation produit dans le langage courant. De tels textes sont difficilement accessibles aux élèves qui n'en acceptent pas la fonction de validation de l'énoncé final. Cela les conduit à produire des textes qui ont la forme d'une démonstration, mais dont l'articulation des pas déductifs est souvent défaillante pour des raisons qui leur échappent.

Une démonstration repose aussi sur les règles logiques qui ne sont acquises que durant l'adolescence. Voici par exemple un problème de logique des propositions réussi par environ 50% des élèves de 12-13 ans.

Vous vous trouverez dans la situation d'un détective qui recueille des indices variés pendant son enquête et qui cherche à découvrir la vérité par son raisonnement et sa déduction. Le détective fait des suppositions et recherche des preuves avec ce qu'on lui dit et avec ce qu'il observe. Maintenant lisez les trois phrases de l'énoncé qui suit et, en réfléchissant bien, essayez de savoir si les conclusions qui sont placées au-dessous de l'énoncé sont vraies ou fausses. Il y a plusieurs bonnes réponses à cocher à chacun des problèmes.

- Si le concierge était complice, alors la porte de l'appartement était ouverte ou le cambrioleur est entré par le sous-sol.

- Si le cambriolage a eu lieu à minuit, alors le concierge était complice.

- On a pu prouver que la porte de l'appartement n'était pas ouverte et que le cambrioleur n'est pas entré par le sous-sol.

Conclusions :

Le concierge n'était pas complice.

Le concierge était complice.

Le cambriolage a eu lieu à minuit.

Le cambriolage n'a pas eu lieu à minuit.

On ne peut pas savoir si le cambriolage a eu lieu à minuit.

Ce problème repose sur deux règles de la logique : la négation de « A ou B » est « non-A et non-B » ; les propositions « si A, alors B » et « si non-B, alors non-A » sont équivalentes c'est-à-dire qu'elles ont la même valeur de vérité. Les deux questions, celle qui porte sur la complicité du concierge et celle qui porte sur l'heur du cambriolage, évaluent la même compétence. Cinq propositions pour deux bonnes réponses, cette forme de questionnaire permet de donner une chance sur dix seulement de réussir à un sujet qui répond au hasard.

Les professeurs de mathématiques sont finalement enclins à proposer à leurs élèves des situations qui conduisent à des démonstrations assez simples, c'est-à-dire dont les pas déductifs sont peu nombreux et où les règles logiques mobilisées sont acquises ou en voie d'acquisition. Les programmes encouragent d'ailleurs ce choix tout en laissant chaque

professeur adapter des exigences au niveau des élèves dont il a la charge. Cela pose néanmoins une difficulté : les démonstrations des propriétés du cours (celles qui vont enrichir le corpus de la théorie) ne sont pas si simples, par conséquent les élèves sont souvent invités à seulement constater les propriétés du cours, mais à démontrer celles qui sont proposées en exercices, ce qui ne rend pas facile le passage de la géométrie d'observation à la géométrie déductive.

Conclusion

La géométrie est un domaine particulier des mathématiques à cause de la relation entre l'espace physique et l'espace géométrique qui le modélise, et à cause du rôle des représentations graphiques dans l'activité géométrique qui sont des outils de travail indispensables à la pensée pour leur fonction heuristique. Après avoir répondu à des problèmes pratiques, la géométrie a été rationalisée puis constituée en système théorique. Plusieurs théories ont été constituées qui correspondent à plusieurs géométries incompatibles car les postulats sont différents. La géométrie enseignée est la géométrie euclidienne, son enseignement ne peut porter directement sur le modèle théorique, il s'appuie sur les connaissances spatiales des sujets.

La relation entre l'espace physique et l'espace géométrique est entretenue, notamment par les problèmes de constructions qui mettent en jeu les instruments de tracé (règle, compas, etc.) constituant des contraintes particulières. Pourtant, les rationalités mises en œuvre dans l'espace physique et dans l'espace géométrique sont très différentes : la problématique pratique et la problématique géométrique conduisent même parfois à des résultats contradictoires.

L'activité de représentation des figures planes et des solides de l'espace est une activité qui favorise la distinction entre les propriétés des objets représentés et les propriétés des représentations car elles sont parfois incompatibles.

Les difficultés des élèves en géométrie se rencontrent souvent dans le passage de cette première phase de l'apprentissage qu'on appelle géométrie d'observation où les objets sont concrets et où les raisons sont pratiques, à la seconde phase qu'on appelle géométrie déductive où les objets sont théoriques (même s'ils sont représentés) et où les raisons sont validées par des énoncés de la théorie et reliées par les règles de la logique (même si la théorie et la logique ne sont pas enseignés).

Bibliographie

Artigue M. & Robinet J. (1982), Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire, *RDM* n°3/1, pp. 5-64.

Berté A. (1995), Réflexion sur inégalité triangulaire et distance d'un point à une droite à partir d'observations de classe, *Petit x* n°40, p. 41-63.

Berthelot R. & Salin M.-H. (1994), L'enseignement de la géométrie à l'école primaire, *Grand N* n°53, pp. 39-56.

Berthelot R. & Salin M.-H. (1999), L'enseignement de la géométrie de l'espace à l'école, *Grand N* n°65, pp. 37-61.

Berthelot R. & Salin M.-H. (2001), L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment peut-on concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? *Petit x* n°56, pp. 5-34.

Boule F. (2001), *Questions sur la géométrie et son enseignement*, Nathan.

Brousseau (1983), Étude de questions d'enseignement : un exemple en géométrie, *séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, Université J. Fourier de Grenoble.

Colmez F. & Parzysz B (1993) : Le vu et le su dans l'évolution des dessins de pyramides du CE2 à la 2nde, in Bessto A ;, Verillon P. & Balacheff N., *Espaces graphiques et graphismes d'espaces*, La pensée sauvage éditions, pp. 35-55.

Duval R. (1992), Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? *Petit x* n°31, pp. 37-61.

Duval R. (1994), Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repères-IREM* n°17, pp. 121-138.

Duval R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de didactique et de sciences cognitives,* V. 10. pp. 5-53.

G. Brousseau, Étude de questions d'enseignement, un exemple la géométrie, Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique IMAG, Université de Grenoble, 1983.

Houdement C. & Kuzniak A. (1999), Réflexion sur l'enseignement de la géométrie, *Grand N* n°64, pp. 65-78.

Kuzniak A. (2004), *Paradigmes et espaces de travail géométriques*, IREM Paris 7.

Laborde C. (1990), L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques, *RDM* n°9/3, pp 337-364.

Noirfalise R. (1991), Figures prégnantes en géométrie, *Repères-IREM* n°2, pp.51-58

Parzysz Bernard (1988) : Bulletin de l'APMEP. Num. 364. p. 339-350. Voir et savoir - la représentation du "perçu" et du "su" dans les dessins de la géométrie de l'espace.

Robert Aline (2003), Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la quatrième : l'organisation des connaissances en niveau de conceptualisation, *Petit x* n°63, pp. 7-29.

Salin M.-H. (2004), L'enseignement de la géométrie au cycle 3, *Bulletin de l'APMEP* n°454, pp. 729-736.

Sayac N. (2002), De l'exploration du quartier à la structuration de l'espace en GS, *Grand N* n°69, pp. 7-18.